<u>第12回復習用問題</u>

2020.4.14

<u>問題1.</u>　連立方程式を掃き出し法の計算で行なう場合、左に係数行列A、右に列ベクトルbとした拡大係数行列 $\hat{A}$ が計算開始点である。その後、行基本変形を行ない左側を単位行列になったときが計算完了点である。すなわち、

$$\underset{\textbf{開始}}{[A\ \ b]} \xrightarrow{\text{行基本変形}} \underset{\textbf{終了}}{[E\ \ c]}$$

掃き出し法の流れ

ところが、連立方程式の中には計算の途中で最下段以降の行の成分がすべて0になってしまうことがある。
(0にならない行の行数をrank:階数という)
たとえば、下のように計算終了時の成分の3行目が0となるときは解を次のように任意定数 λ を使って表す。

$$\underset{\textbf{計算終了時}}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}} \longrightarrow \begin{aligned} & x - 2\lambda = 2 \\ & y - \lambda = 3 \\ & z = \lambda \end{aligned}$$

つまり、解は　$x = 2 + 2\lambda$,$y = 3 + \lambda$,$z = \lambda$ (ただし、λ は任意の実数)と書く。
上記の例を参考に次の(1)、(2)の連立方程式を掃き出し法により計算して解を求めなさい。

(1) $\begin{cases} 2x - y + 3z = 0 \\ -3x + 2y - 4z = 0 \\ 5x - 4y + 6z = 0 \end{cases}$

$$\underset{\text{開始}}{\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ -3 & 2 & -4 & 0 \\ 5 & -4 & 6 & 0 \end{bmatrix}} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 3/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & -3/2 & -3/2 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 3/2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \underset{\text{終了}}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}$$

1行 $\times \frac{1}{2}$
2行 + 1行 $\times \frac{3}{2}$
3行 + 1行 $\times (-\frac{5}{2})$

2行 $\times$ 2
3行 + 2行 $\times$ 3

よって、$x = \underline{-2\lambda}$, $y = \underline{-\lambda}$, $z = \underline{\lambda}$ (λは任意の実数)

（２）$\begin{cases} 2x-\ \ y+3z= & 1 \\ -3x+2y-4z= & 2 \\ 5x-4y+6z= & -8 \end{cases}$

$$\underset{\text{開始}}{\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ -3 & 2 & -4 & 2 \\ 5 & -4 & 6 & -8 \end{bmatrix}} \xrightarrow[\text{(1)と同様}]{} \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 3/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 7/2 \\ 0 & -3/2 & -3/2 & -21/2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{(1)と同様}]{} \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 3/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \underset{\text{終了}}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}$$

よって、$x=4-2\lambda$, $y=7-\lambda$, $z=\lambda$ （λは任意の実数）

問題2.　3直線の$a_1x+b_1y+c_1=0$, $a_2x+b_2y+c_2=0$, $a_3x+b_3y+c_3=0$が共通の交点 (x_0, y_0)を通る条件は

$$\begin{cases} a_1x_0+b_1x_0+c_1=0 \\ a_2x_0+b_2y_0+c_2=0 \\ a_3x_0+b_3y_0+c_3=0 \end{cases} \xrightarrow{\text{行列表示}} \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

列ベクトル$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{bmatrix} \neq \vec{0}$ なので(自明な解ではないので)、上記の等式が成立する条件は

行列式$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$である。すなわち、行列式が0は3直線が1点で交わる必要十分条件となる

上記の性質と行列式を計算することにより、下記の命題を証明しなさい。

命題「次の３直線は１点で交わることを示せ．

$y=ax+a^2-bc$, $y=bx+b^2-ca$, $y=cx+c^2-ab$」

$$\begin{cases} ax-y+a^2-bc=0 \\ bx-y+b^2-ca=0 \\ cx-y+c^2-ab=0 \end{cases}$$ を行列にして、$$\begin{bmatrix} a & -1 & a^2-bc \\ b & -1 & b^2-ca \\ c & -1 & c^2-ab \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

これより、
$$\begin{vmatrix} a & -1 & a^2-bc \\ b & -1 & b^2-ca \\ c & -1 & c^2-ab \end{vmatrix} = \underset{\substack{\text{2行}-\text{1行} \\ \text{3行}-\text{1行}}}{\begin{vmatrix} a & -1 & a^2-bc \\ b-a & 0 & b^2-a^2+c(b-a) \\ c-a & 0 & c^2-a^2+b(c-a) \end{vmatrix}} = \underset{\substack{\text{3列目を} \\ \text{因数分解}}}{\begin{vmatrix} a & -1 & a^2-bc \\ b-a & 0 & (b-a)(a+b+c) \\ c-a & 0 & (c-a)(a+b+c) \end{vmatrix}}$$

$$\underset{\substack{\text{2列目について} \\ \text{余因子展開}}}{=-1\times(-1)^{1+2}\times \begin{vmatrix} b-a & (b-a)(a+b+c) \\ c-a & (c-a)(a+b+c) \end{vmatrix}} = (b-a)(c-a)(a+b+c)-(b-a)(a+b+c)(c-a)$$

$$=0$$

よって、行列式$=0$なので3直線は一点で交わる

問題3.

3点 (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3)を通る平面の方程式は下記の行列式で表すことができる。

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0$$

上記の性質を利用して、次の(1)、(2)の条件を満たす平面の方程式を求めなさい。

(1) **3点 $(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$, $(0, 0, c)$ を通る平面($abc \neq 0$).**

$$\begin{vmatrix} x-a & y-0 & z-0 \\ 0-a & b-0 & 0-0 \\ 0-a & 0-0 & c-0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-a & y & z \\ -a & b & 0 \\ -a & 0 & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-a & y & z+\frac{c}{a}(x-a) \\ -a & b & -c \\ -a & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

3列 + 1列 × $\left(\frac{c}{a}\right)$

$$= -a \times (-1)^{3+1} \times \begin{vmatrix} y & z+\frac{c}{a}(x-a) \\ b & -c \end{vmatrix} = -a\left[y \times (-c) - \left\{z+\frac{c}{a}(x-a)\right\} \times b\right] = 0$$

3行目について
余因子展開

$$acy + abz + bcx - abc = 0$$

ゆえに、 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ (ただし、$abc \neq 0$)

(2) **3点 $(3, -2, 3)$, $(2, 1, -3)$, $(-1, 0, 4)$ を通る平面.**

$$\begin{vmatrix} x-3 & y-(-2) & z-3 \\ 2-3 & 1-(-2) & -3-3 \\ -1-3 & 0-(-2) & 4-3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-3 & y+2 & z-3 \\ -1 & 3 & -6 \\ -4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-3+4(z-3) & y+2-2(z-3) & z-3 \\ -25 & 15 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

2列 + 3列 × (-2)
1列 + 3列 × 4

$$= \begin{vmatrix} x+4z-15 & y-2z+8 & z-3 \\ -25 & 15 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

3行目について
余因子展開

$$= 1 \times (-1)^{3+3} \times \begin{vmatrix} x+4z-15 & y-2z+8 \\ -25 & 15 \end{vmatrix} = 15(x+4z-15) - (y-2z+8) \times (-25) = 0$$

$$3(x+4z-15) + 5(y-2z+8) = 0$$

$$3x + 5y + 2z = 5$$