第8回復習用問題の解答

問題1.　①　微分方程式

②　ラプラス

③　t

④　s

⑤　逆ラプラス

⑥　jω

⑦　ゲイン

⑧　絶対値

⑨　片対数プロット図

⑩　位相

⑪　偏角

問題2. 系の伝達関数 $G(s)$ が下式で与えられる系について次の問に答えなさい。

$$G(s) = s \cdot \frac{1}{2s+1} \cdot \frac{1}{\frac{1}{100}s+1}$$

(1)周波数伝達関数 $G(j\omega)$ を求めなさい。(分母の実数化はしなくてもよいとする)

(2) $G_1(s) = s$, $G_2(s) = \frac{1}{2s+1}$, $G_3(s) = \frac{1}{\frac{1}{100}s+1}$ として、それぞれの要素に周波数入力を加えたときの、ゲイン $g = 20\log_{10}|G(j\omega)|$ と位相 $\varphi = \arg G(j\omega)$ を計算しなさい。

(3) (2)の結果をボード線図に図示しなさい。

(4) 複素数と対数の計算の性質を使うことで系のボード線図を図示することができる。
すなわち、

$$g = 20\log_{10}|G(j\omega)| = 20\log_{10}|G_1(j\omega)| + 20\log_{10}|G_2(j\omega)| + 20\log_{10}|G_3(j\omega)|$$

$$= g_1 + g_2 + g_3$$

$$\varphi = \arg G(j\omega) = \arg G_1(j\omega) + \arg G_2(j\omega) + \arg G_3(j\omega)$$

$$= \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3$$

である。上記の性質と(3)の結果を利用して系のボード線図を図示しなさい。

(1) s と $j\omega$ を入れ替えて. $G(j\omega) = \frac{j\omega}{(1+j2\omega)(1+j\frac{\omega}{100})}$

(2) $G_1(j\omega) = j\omega$ より.

$g_1 = 20\log_{10}\omega$, $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$

$$G_2(j\omega) = \frac{1}{1+j2\omega} = \frac{1-j2\omega}{1+4\omega^2}$$

分母の実数化

$$g_2 = 20\log_{10}\frac{1}{\sqrt{1+4\omega^2}} = -10\log_{10}(1+4\omega^2), \quad \tan\varphi_2 = \frac{-\frac{2\omega}{1+4\omega^2}}{\frac{1}{1+4\omega^2}} = -2\omega$$

$$\varphi_2 = \tan^{-1}(-2\omega) = -\tan^{-1}(2\omega)$$

$$G_3(j\omega) = \frac{1}{1+j\frac{\omega}{100}} = \frac{1-j\frac{\omega}{100}}{1+(\frac{\omega}{100})^2}$$

$$g_3 = 20\log_{10}\frac{1}{\sqrt{1+(\frac{\omega}{100})^2}} = -10\log_{10}\left(1+\left(\frac{\omega}{100}\right)^2\right), \quad \varphi_3 = -\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{100}\right)$$

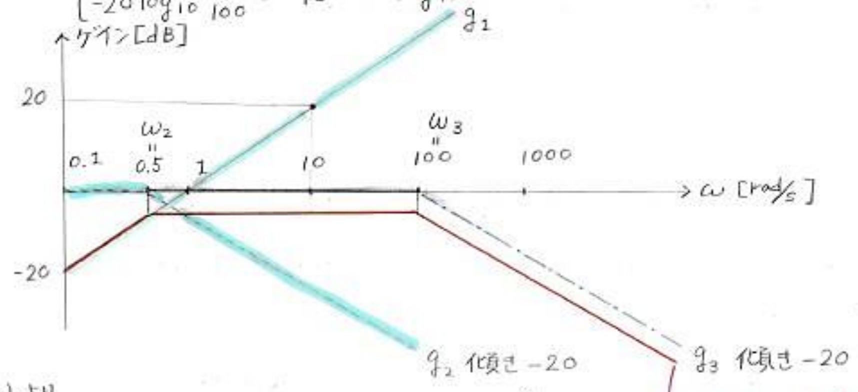
(3) (2)より、

$g_1 = 20\log_{10}\omega$

$$g_2 = \begin{cases} 0 & (\omega_2 \leqq 0.5) \\ -20\log_{10} 2\omega = -20\log_{10} 2 - 20\log_{10}\omega & (\omega_2 > 0.5) \end{cases}$$

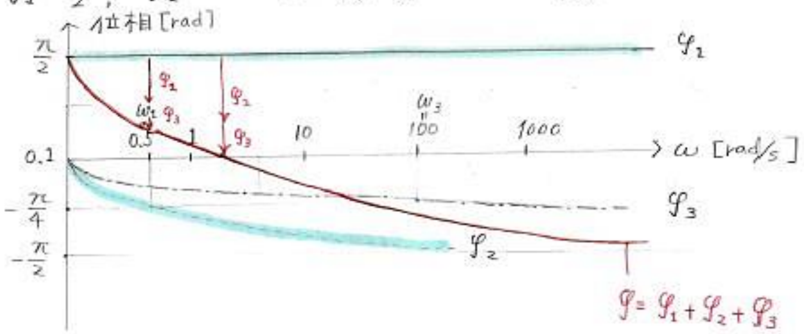
← 注 $1+(2\omega)^2$ で $2\omega = 1$ を満たすのが ω_2

$$g_3 = \begin{cases} 0 & (\omega_3 \leqq 100) \\ -20\log_{10}\frac{\omega}{100} = 40 - 20\log_{10}\omega & (\omega_3 > 100) \end{cases}$$



(2)より、

$\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$, $\varphi_2 = -\tan^{-1}(2\omega)$, $\varphi_3 = -\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{100}\right)$



(4) g は $g_1 \sim g_3$ の重ね合わせで考えることにより、

上図の赤線

φ は $\varphi_1 \sim \varphi_3$ の重ね合わせで考えることにより、

上図の赤線

問題3.　次の3元一次連立方程式を解きなさい。

(1)

$$\begin{cases} 2x+3y-z=5 & -① \\ 4x+4y-3z=3 & -② \\ -2x+3y-z=1 & -③ \end{cases}$$

前進

①×2−②より

$2y+z=7$ −④

①+②より

$6y-2z=6$

$3y-z=3$ −⑤

④+⑤より

$5y=10$

$\therefore \underline{y=2}$

後退

$y=2$を④に代入して、

$\underline{z=3}$

$y=2$、$z=3$を①に代入して、

$\underline{x=1}$

よって $x=1,\ y=2,\ z=3$

(2)

$$\begin{cases} x+2y-2z=3 & -① \\ x-y+3z=4 & -② \\ 2x+3y-5z=1 & -③ \end{cases}$$

前進

①−②より

$3y-5z=-1$ −④

①×2−③より

$y+z=5$ −⑤

④−⑤×3より

$-8z=-16$

$\therefore \underline{z=2}$

後退

$z=2$を⑤に代入

$\underline{y=3}$

$y=3$、$z=2$を①に代入

$\underline{x=1}$

よって $x=1,\ y=3,\ z=2$

◎ 3変数の連立方程式の解き方

$$x,y,z \xrightarrow[\text{消去}]{\text{1変数}} y,z \xrightarrow[\text{消去}]{\text{1変数}} \underset{\text{解}}{z=\triangle} \xrightarrow[\text{代入}]{z=\triangle\text{を}} y=\triangledown,\ z=\triangle \xrightarrow[\text{を代入}]{y=\triangledown,\ z=\triangle} \begin{matrix} x=\square \\ y=\triangledown \\ z=\triangle \end{matrix}$$

前進　　後退

上の流れのように連立方程式では
文字を消去する"前進操作"、求まった解を順次代入
する"後退操作"がある。
次回学習する掃き出し法は数の成分だけを
抜き出して、行基本変形で前進・後退操作をして
解を求める計算方法(アルゴリズム)である。

今回の計算を行列で表すと

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 4 & -3 \\ -2 & 3 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\downarrow \text{行基本変形　前進}\rightarrow\text{後退}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

x,y,zを書かずに拡大係数行列を使うと

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 4 & 4 & -3 & 3 \\ -2 & 3 & -1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{行基本変形}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

対角成分

以上のように、対角成分を1に
することで操作が完了する。