第6回復習用問題

2020.2.24

問題1.　次の 2 次関数に最大値・最小値があれば，それを求めよ。

(1)　$y=3x^2+4x-1$

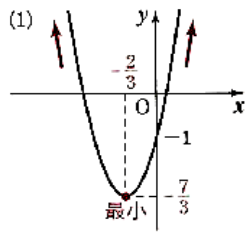
(1)　$3x^2+4x-1=3\left\{x^2+\frac{4}{3}x+\left(\frac{2}{3}\right)^2\right\}-3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2-1$

$$=3\left(x+\frac{2}{3}\right)^2-\frac{7}{3}$$

よって，グラフは 頂点：$\left(-\frac{2}{3},\ -\frac{7}{3}\right)$，軸：$x=-\frac{2}{3}$ の，下に凸の放物線である。

ゆえに　$x=-\frac{2}{3}$ で 最小値 $-\frac{7}{3}$ をとる。

また，y の値はいくらでも大きくなるから 最大値はない。



(2)　$y=-2x^2+x$

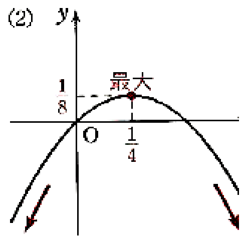
(2)　$-2x^2+x=-2\left\{x^2-\frac{1}{2}x+\left(\frac{1}{4}\right)^2\right\}+2\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2$

$$=-2\left(x-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{1}{8}$$

よって，グラフは 頂点：$\left(\frac{1}{4},\ \frac{1}{8}\right)$，軸：$x=\frac{1}{4}$ の，上に凸の放物線である。

ゆえに　$x=\frac{1}{4}$ で 最大値 $\frac{1}{8}$ をとる。

また，y の値はいくらでも小さくなるから 最小値はない。

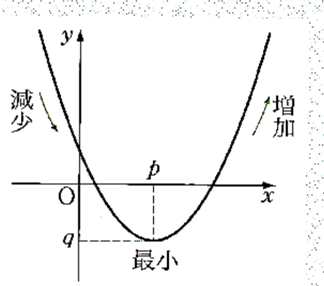


〜〜〜の部分の説明は，答案には書かなくてよい。

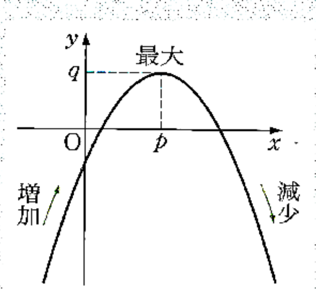
$y=a(x-p)^2+q$ の最大・最小

2 次関数 $y=a(x-p)^2+q$ は，

$a>0$ のとき，
　$x=p$ で最小値 q をとり，
　最大値はない。



$a<0$ のとき，
　$x=p$ で最大値 q をとり，
　最小値はない。



問題2.　a, b は正の数とする。次の不等式を証明せよ。また，等号が成り立つのはどのようなときか。

(1) $a+\dfrac{4}{a}\geqq 4$

(1) $a>0$, $\dfrac{4}{a}>0$ であるから

$a+\dfrac{4}{a}\geqq 2\sqrt{a\cdot\dfrac{4}{a}}=2\cdot 2=4$　よって　$a+\dfrac{4}{a}\geqq 4$　終

等号が成り立つのは　$a=\dfrac{4}{a}$　すなわち $a=2$ のとき。

(2) $\left(a+\dfrac{1}{b}\right)\left(b+\dfrac{4}{a}\right)\geqq 9$

(2) (左辺) $=ab+4+1+\dfrac{4}{ab}=ab+\dfrac{4}{ab}+5$　…… ①

$ab>0$, $\dfrac{4}{ab}>0$ であるから　$ab+\dfrac{4}{ab}\geqq 2\sqrt{ab\cdot\dfrac{4}{ab}}=2\cdot 2=4$

よって，①から　$\left(a+\dfrac{1}{b}\right)\left(b+\dfrac{4}{a}\right)\geqq 4+5=9$　終

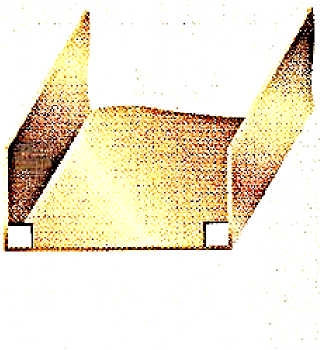
等号が成り立つのは　$ab=\dfrac{4}{ab}$　すなわち $ab=2$ のとき。

相加平均と相乗平均の関係

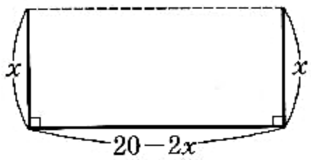
$a>0$, $b>0$ のとき，$\dfrac{a+b}{2}\geqq\sqrt{ab}$

等号が成り立つのは，$a=b$ のときである。

問題3.　幅が 20cm の銅板がある。これを図のように両端から同じ長さだけ 90° 折り曲げて水を流す溝を作る。切り口の面積を最大にするには，両端から何 cm だけ折り曲げればよいか。また，そのときの切り口の面積を求めよ。



解　銅板の両端から折り曲げる長さを $x$cm とすると，溝の底の幅は $(20-2x)$cm となる。



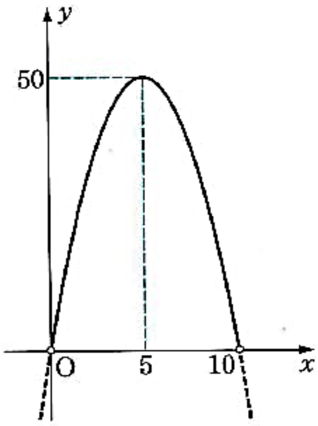
$x>0$，$20-2x>0$ より，

$$0<x<10$$

切り口の面積を $y$cm^2 とすると，

$$\begin{aligned} y &= x(20-2x) = -2x^2+20x \\ &= -2(x^2-10x) \\ &= -2(x-5)^2+50 \end{aligned}$$

この関数のグラフは，右の図の実線部分となるから，y は $x=5$ のとき最大値 50 をとる。



よって，両端から 5cm だけ折り曲げればよく，そのときの切り口の面積は 50cm^2 である。

問題4.

変圧器には大きく分けて銅損と鉄損が存在する。銅損は負荷電流が巻線を流れることによるジュール熱に由来し、鉄損は鉄心に磁束が通過することによる渦電流損とヒステリシス損が原因の損失である。したがって、銅損は負荷電流の2乗に比例し、鉄損は負荷によらず一定である。

変圧器の負荷比をαとすれば、変圧器の理論効率は次式で表すことができる。

変圧器の理論効率 $$\eta = \frac{\alpha P_n \cos\theta}{\alpha P_n \cos\theta + \alpha^2 P_{cn} + P_i}$$

変圧器定格容量 P_n[kVA]、 鉄損 p_i [kW]、全負荷銅損 p_{cn} [kW]、負荷の力 率 $cos\theta$、

上式と相加平均・相乗平均の関係を利用して、最大効率になる条件は銅損と鉄損が等しいことであることを証明しなさい。

$$\eta = \frac{\alpha P_n \cos\theta}{\alpha P_n \cos\theta + \alpha^2 P_{cn} + P_i}$$

分母、分子をαで割る

$$= \frac{P_n \cos\theta}{P_n \cos\theta + \alpha P_{cn} + \frac{1}{\alpha} P_i}$$

ここで、 $\alpha P_{cn} + \frac{1}{\alpha} P_i \geqq 2\sqrt{\alpha P_{cn} \times \frac{1}{\alpha} P_i} = 2\sqrt{P_{cn} P_i}$

相加相乗平均の関係

したがって、 $$\eta \leqq \frac{P_n \cos\theta}{P_n \cos\theta + 2\sqrt{P_{cn} P_i}}$$

等号成立(最大となる条件)は、

$$\alpha P_{cn} = \frac{1}{\alpha} P_i \qquad \therefore \ \alpha^2 P_{cn} = P_i$$

つまり、 (負荷率αの銅損) = (鉄損)
が最大効率の条件となる。

問題5.　誘導電動機は変圧器の等価回路と似ている。電動機の機械的出力は抵抗 $\frac{1-s}{s}r_2$ での消費電力と考えることができる。すべり角周波数ωは同期角速度ωsを用いて ω＝(1-s)ωsと表せることに注意すると、誘導機のトルクは次式のすべりsの関数となる。ただし、簡単のために一次抵抗と一次リアクタンスは無視することとする。

誘導機のトルク $T = \frac{P_m}{\omega} = \frac{1}{(1-s)\omega_s} \times \frac{1-s}{s} r_2 \left(\frac{V_2}{\sqrt{\left(\frac{r_2}{s}\right)^2 + x_2^2}} \right)^2 = \frac{V_2^2}{\omega_s} \times \frac{1}{s} \times \frac{1}{\left(\frac{r_2}{s}\right)^2 + x_2^2}$

上式と相加平均・相乗平均の関係を利用して、最大トルクを発生するすべり s_{max}を求めなさい。
また、求めた最大すべり s_{max}は二次抵抗の値に比例する（比例推移）ことを説明しなさい。

$$T = \frac{V_2^2}{\omega_s} \times \frac{1}{\frac{r_2^2}{s} + s x_2^2}$$ となる。

ここで、 $\frac{r_2^2}{s} + s x_2^2 \geqq 2\sqrt{\frac{r_2^2}{\cancel{s}} \times \cancel{s} x_2^2} = 2 r_2 x_2$

相加相乗平均
の関係

よって、 $T \leqq \frac{V_2^2}{\omega_s} \times \frac{1}{2 r_2 x_2}$ －(*)

等号成立（最大となる条件）は

$$\frac{r_2^2}{s} = s x_2^2$$

$$\therefore \underline{S_{max} = \frac{r_2}{x_2}}$$

上式の分子に二次抵抗があるため、S_{max}は二次抵抗r_2に比例することが確認できる。

注　(*)式で $\omega_s \propto f$, $x_2 = \omega_s L_2 \propto f$ なので、
Tは $\frac{V_2^2}{f^2}$ に比例することが分かる。$\frac{V}{f}$ = 一定にすることで
定トルク運転が可能となる。（VVVF制御）