第4回授業資料

2019.5.9

1章.　恒等式の計算

次の等式①と②の違いはどこにあるのだろうか。

$(x+1)+(x+2)=7$ ……①

$(x+1)+(x+2)=2x+3$ ……②

等式①は，xの値が2であるときに限って成り立つ。

これに対し，等式②は，左辺を整理したものが右辺であるから，この式のxにどのような値を代入しても等式が成り立つ。

一般に，等式②のように，等式で両辺が式として等しいとき，すなわち，両辺が同じ式に変形されるとき，この等式を **恒等式** という。

用語チェック

①は方程式＝特定のXにだけ成立する式のこと
②は**恒等式**＝**どんなXの値でも成立する式**

例.　$a(x-1)^2+b(x-1)+c=2x^2+4x+7$ がxについての恒等式となるように，定数a，b，cの値を定めよ。

等式の左辺を展開してxについて整理すると，

$ax^2+(-2a+b)x+(a-b+c)=2x^2+4x+7$

これがxについての恒等式であるから，係数を比較して，

$a=2$，　$-2a+b=4$，　$a-b+c=7$

よって，　$a=2$，$b=8$，$c=13$

両辺を降べきの順に整理して
各次数の係数を比較する

2章-1.　2次方程式の解き方～解の公式の利用～

a，b，cが定数で，aが0でないとき，xについての方程式

$ax^2+bx+c=0$

を **2次方程式** という。方程式を満たすxの値を，その方程式の **解** といい，方程式の解をすべて求めることを，**方程式を解く** という。

2次方程式の解の公式

2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解は，$b^2-4ac\geqq 0$ のとき，

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

用語チェック

整式、多項式＝Xに関する単なる式

方程式＝**"=0"で結ばれた等式**で解がある

解の公式の証明（補足）

2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ を解いてみよう。

両辺を a で割って，

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$$

$$x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}$$

両辺に $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ を加えて，

$$x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=-\frac{c}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2} \quad \cdots①$$

$b^2-4ac \geqq 0$ のとき，

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

よって，

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

例. $3x^2-5x+1=0$ の解を求めよ。

解の公式で、a=3 ， b=-5 ， c=1

$$x=\frac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4\cdot3\cdot1}}{2\cdot3}$$

$$=\frac{5\pm\sqrt{13}}{6}$$

注）2次方程式の解は通常2個あるので注意！

2章-2.　2次方程式の解き方～因数分解の利用～

2 次方程式 は，左辺が因数分解できる場合には，

$AB=0$ ならば，$A=0$　または　$B=0$

を使って解くことができる。

積（掛け算）が0⇒少なくとも1つが0

例. $2x^2+3x-2=0$

左辺を因数分解すると，　$(2x-1)(x+2)=0$

したがって，　$2x-1=0$　または　$x+2=0$

であるから，$x=\frac{1}{2}$　または　$x=-2$

よって，2 次方程式の解は，$x=\frac{1}{2}$，-2

たすき掛けの因数分解

（積）＝0の形で解が求まる

2章-3.　3次以上の方程式の解き方

x の整式 $P(x)$ が n 次式のとき，$P(x)=0$ を **n 次方程式** という。
たとえば，$x^3-3x+2=0$ は 3 次方程式，$x^4+3x^2-4=0$ は 4 次方程式である。3 次以上の方程式を **高次方程式** という。

注）3次以上の方程式は解の公式はない！
そのため、解くには下の因数定理を使うこと

整式 $P(x)$ を $x-a$ で割ったときの余りは，$P(a)$ であった。したがって，整式 $P(x)$ が $x-a$ で割り切れるのは，余りが 0 のときであるから，次の **因数定理** が成り立つ。

因数定理

整式 $P(x)$ について，

$$P(a)=0 \iff P(x) \text{ は } x-a \text{ で割り切れる}$$

復習　(割られる式)=(割る式)×(商)+(余り)

例.　方程式 $x^3-4x^2+5x-2=0$ を解け。

因数定理を利用して，左辺を因数分解する。
$P(x)=x^3-4x^2+5x-2$ とおくと，$P(1)=0$ となるから，$P(x)$ は $x-1$ で割り切れて，

$$P(x)=(x-1)(x^2-3x+2)=(x-1)^2(x-2)$$

$P(x)=0$ より，　$x-1=0$　または　$x-2=0$
よって，　$x=1,\ 2$

◆2次方程式の解と係数の関係◆

2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の2つの解

$$\alpha=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\quad \beta=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

について，$\alpha+\beta$，$\alpha\beta$ を計算すると，

$$\alpha+\beta=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-2b}{2a}=-\frac{b}{a}$$

$$\alpha\beta=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\times\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$=\frac{(-b)^2-(b^2-4ac)}{(2a)^2}=\frac{b^2-b^2+4ac}{4a^2}=\frac{c}{a}$$

このように，2次方程式の2つの解の和と積は，方程式の係数の簡単な式で表される。これを，2次方程式の **解と係数の関係** という。

2次方程式の解と係数の関係

2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の2つの解を α，β とすると，

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a},\quad \alpha\beta=\frac{c}{a}$$

例.　2次方程式の解と係数の関係］　**2次方程式 $3x^2+4x+7=0$ の2つの解の和と積を求めてみよう。**

2つの解を α，β とすると，$\alpha+\beta=-\dfrac{4}{3}$，　$\alpha\beta=\dfrac{7}{3}$

(1) 次の等式が x についての恒等式となるように，定数 a，b，c，d の値を定めよ。

$$-2x^3+8x^2+ax+b+10=(2x^2+3)(cx+d)$$

次の方程式を解け。

(2) $\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4}x-\frac{1}{3}=0$

(3) $3x^2+5x-2=0$

(4) $4x^2-8x+3=0$

(5) $x^3=27$

(6) $3x^3+4x^2-6x-7=0$

(7) $x^4+6x^3-24x-16=0$

(8) 2次方程式 $x^2-2x+3=0$ の2つの解を α, β とする。次の式の値を求めよ。

(1) $(\alpha+1)(\beta+1)$ (2) $\alpha^2+\beta^2$ (3) $\alpha^3+\beta^3$ (4) $\dfrac{\beta}{\alpha-1}+\dfrac{\alpha}{\beta-1}$

(1) 次の等式が x についての恒等式となるように，定数 a，b，c，d の値を定めよ。

$$-2x^3+8x^2+ax+b+10=(2x^2+3)(cx+d)$$

与式の右辺を展開して整理すると

$$-2x^3+8x^2+ax+b+10=2cx^3+2dx^2+3cx+3d$$

両辺の同じ次数の項の係数を比較して

$$-2=2c,\quad 8=2d,\quad a=3c,\quad b+10=3d$$

この連立方程式を解いて

$$\underline{a=-3,\quad b=2,\quad c=-1,\quad d=4}$$

次の方程式を解け。

(2) $\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4}x-\frac{1}{3}=0$

両辺に 12 を掛けて　$6x^2+3x-4=0$

よって　$x=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\cdot6\cdot(-4)}}{2\cdot6}=\underline{\frac{-3\pm\sqrt{105}}{12}}$

(3) $3x^2+5x-2=0$

左辺を因数分解して　$(x+2)(3x-1)=0$

よって　$\underline{x=-2,\ \frac{1}{3}}$

(4) $4x^2-8x+3=0$

左辺を因数分解して　$(2x-1)(2x-3)=0$

よって　$\underline{x=\frac{1}{2},\ \frac{3}{2}}$

(5) $x^3=27$

与式から　$x^3-3^3=0$　ゆえに　$(x-3)(x^2+3x+9)=0$

よって　$x-3=0$　または　$x^2+3x+9=0$

$x-3=0$ から　$x=3$

$x^2+3x+9=0$ から　$x=\frac{-3\pm3\sqrt{3}\,i}{2}$

したがって　$\underline{x=3,\ \frac{-3\pm3\sqrt{3}\,i}{2}}$

(6) $3x^3+4x^2-6x-7=0$

$P(x)=3x^3+4x^2-6x-7$ とすると

$$P(-1)=3(-1)^3+4(-1)^2-6(-1)-7=0$$

よって，$P(x)$ は $x+1$ を因数にもつ。

ゆえに　$P(x)=(x+1)(3x^2+x-7)$

よって　$(x+1)(3x^2+x-7)=0$

ゆえに　$x+1=0$ または $3x^2+x-7=0$

したがって　$x=-1,\ \dfrac{-1\pm\sqrt{85}}{6}$

(7) $x^4+6x^3-24x-16=0$

$P(x)=x^4+6x^3-24x-16$ とすると

$$P(2)=2^4+6\cdot2^3-24\cdot2-16=0$$

よって，$P(x)$ は $x-2$ を因数にもつ。

ゆえに　$P(x)=(x-2)(x^3+8x^2+16x+8)$

また，$Q(x)=x^3+8x^2+16x+8$ とすると

$$Q(-2)=(-2)^3+8(-2)^2+16(-2)+8=0$$

よって，$Q(x)$ は $x+2$ を因数にもつ。

ゆえに　$Q(x)=(x+2)(x^2+6x+4)$

よって　$(x-2)(x+2)(x^2+6x+4)=0$

ゆえに　$x-2=0$ または $x+2=0$ または $x^2+6x+4=0$

したがって　$x=\pm2,\ -3\pm\sqrt{5}$

(8) 2 次方程式 $x^2-2x+3=0$ の 2 つの解を α，β とする。次の式の値を求めよ。

(1) $(\alpha+1)(\beta+1)$　(2) $\alpha^2+\beta^2$　(3) $\alpha^3+\beta^3$　(4) $\dfrac{\beta}{\alpha-1}+\dfrac{\alpha}{\beta-1}$

解と係数の関係から　$\alpha+\beta=2$，$\alpha\beta=3$

(1) $(\alpha+1)(\beta+1)=\alpha\beta+(\alpha+\beta)+1=3+2+1=6$

(2) $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=2^2-2\cdot3=-2$

(3) $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=2^3-3\cdot3\cdot2=-10$

(4) $$\frac{\beta}{\alpha-1}+\frac{\alpha}{\beta-1}=\frac{\beta(\beta-1)+\alpha(\alpha-1)}{(\alpha-1)(\beta-1)}$$

$$=\frac{\alpha^2+\beta^2-(\alpha+\beta)}{\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1}=\frac{-2-2}{3-2+1}=-2$$