第4回授業資料

2019.4.25

1章-1. 整式の除法のやり方

679 を 21 で割ると，余りが 7 となる。この計算で，7 は割る数 21 より小さいので，これ以上割ることはできない。

$$\begin{array}{r} 32 \\ 21\overline{)679} \\ 63 \\ \hline 49 \\ 42 \\ \hline 7 \end{array}$$

このとき，次のように表すことができる。

$$679 = 21 \times 32 + 7$$

同じような計算を整式で行うことを考えよう。

$$A = 6x^2 + 7x + 9$$

$$B = 2x + 1$$

のとき，A を B で割る計算は，次のようにする。

2xを掛けて 6x^2となる式

$$\begin{array}{r} 3x \\ \boxed{2x}+1\overline{)6x^2+7x+9} \\ \boxed{6x^2}+3x \\ \hline 4x+9 \end{array}$$

→

2xを掛けて 4xとなる式

$$\begin{array}{r} 3x\ +2 \\ \boxed{2x}+1\overline{)6x^2+7x+9} \\ 6x^2+3x \\ \hline 4x+9 \\ \boxed{4x}+2 \\ \hline 7 \end{array}$$

次数をそろえる

例. 次の式 A，B を x についての整式とみて，A を B で割った商と余りを求めよ。

$$A = 3x^3 + 4y^3 - 11x^2y,\quad B = 3x - 2y$$

$$\begin{array}{r} x^2-\ 3xy-2y^2 \\ 3x-2y\overline{)3x^3-11x^2y+4y^3} \\ 3x^3-\ 2x^2y \\ \hline -\ 9x^2y \\ -\ 9x^2y+6xy^2 \\ \hline -6xy^2+4y^3 \\ -6xy^2+4y^3 \\ \hline 0 \end{array}$$

1次の項はないので空けておく

商 $x^2-3xy-2y^2$，余り 0

1章-2. 整式の除法の等式

1章-1 の割り算の結果を式で表すと，次のようになる。

$$\underbrace{6x^2+7x+9}_{\text{(もとの式)}} = \underbrace{(2x+1)}_{\text{(商)}}\underbrace{(3x+2)}_{\text{(割る式)}}\underbrace{+7}_{\text{(余り)}}$$

すなわち，

$$A = B(3x+2) + 7$$

整式の除法で基本となるのは，割り算について成り立つ等式

公式 $A = BQ + R$　すなわち　(割られる式)＝(割る式)×(商)＋(余り)

の関係式である。

例. $2x^2+x-2$ で割ると，商が $-3x+5$，余りが $-2x+4$ である整式 A を求めよ。

$$A=(2x^2+x-2)\times(-3x+5)-2x+4$$
$$=-6x^3+7x^2+9x-6$$

2章-1. 分数式の四則演算

1 分数式の基本性質

分母と分子に同じものがあれば約分できる

$C\neq0$，$D\neq0$ のとき　$\dfrac{A}{B}=\dfrac{A\times C}{B\times C}$，$\dfrac{A}{B}=\dfrac{A\div D}{B\div D}$

2 分数式の四則計算

① 乗法　$\dfrac{A}{B}\times\dfrac{C}{D}=\dfrac{AC}{BD}$

掛け算は分母・分子を掛けるだけ

② 除法　$\dfrac{A}{B}\div\dfrac{C}{D}=\dfrac{A}{B}\times\dfrac{D}{C}=\dfrac{AD}{BC}$

割り算は逆数の掛け算

③ 加法，減法

$$\frac{A}{C}+\frac{B}{C}=\frac{A+B}{C},\quad \frac{A}{C}-\frac{B}{C}=\frac{A-B}{C}$$

分母がそろっているときは、分子をそのまま計算できる！

例1. 次の分数式を約分して，既約分数式にせよ。

$$\frac{x^2-4x+3}{2x^2-2x-12}$$

$$\frac{x^2-4x+3}{2x^2-2x-12}=\frac{(x-1)(x-3)}{2(x+2)(x-3)}=\frac{x-1}{2(x+2)}$$

(x-3)で約分する

例2. 次の分数式を約分して，既約分数式にせよ。

$$\frac{x^2+2x}{x^2+4x+3}\times\frac{x+3}{x^2+x-2}\div\frac{x+1}{x-1}$$

$$\frac{x^2+2x}{x^2+4x+3}\times\frac{x+3}{x^2+x-2}\div\frac{x+1}{x-1}$$
$$=\frac{x(\cancel{x+2})}{(x+1)(\cancel{x+3})}\times\frac{\cancel{x+3}}{(\cancel{x-1})(\cancel{x+2})}\boxed{\times\frac{\cancel{x-1}}{x+1}}$$

割り算は逆数の掛け算

因数分解して約分

$$=\frac{x}{(x+1)^2}$$

2章-2. 分数式の通分

分母が異なる分数式の加法，減法 では，
分母・分子に適切な整式を掛けて，
分母を同じにする（**通分**）。………

$$\frac{A}{\boxed{B}}+\frac{C}{D}=\frac{AD}{BD}+\frac{BC}{BD}$$

クロスして掛け算

分母がともにBD

例. 次の計算をせよ。

$$\frac{4}{x^2+4}-\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x+2}$$

$$\begin{aligned}\frac{4}{x^2+4}-\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x+2}&=\frac{4}{x^2+4}-\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+2}\right)\\&=\frac{4}{x^2+4}-\frac{(x+2)-(x-2)}{(x-2)(x+2)}\\&=\frac{4}{x^2+4}-\frac{4}{x^2-4}\\&=\frac{4\{x^2-4-(x^2+4)\}}{(x^2+4)(x^2-4)}\\&=\frac{4\cdot(-8)}{(x^2)^2-4^2}\\&=-\frac{32}{x^4-16}\end{aligned}$$

3つの項の分母はバラバラなので通分する

第2,3項をまず通分

2回目の通分

3章-. 対称式と対称式の計算

2 文字の対称式・交代式　a，b の多項式で，a^2+b^2，a^3+b^3 のように，a と b を入れ替えても，もとの式と同じになるものを，a，b についての **対称式** という。
特に，$a+b$，ab を **基本対称式** という。

例1.　$a+b=x$，$ab=y$ とおくとき，次の式を x，y で表せ。
(ア)　a^2+b^2　　　　(イ)　a^3+b^3

$a+b=x$，$ab=y$ であるから

前回学習した乗法公式

(ア)　$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$　　$\boxed{a^2+2ab+b^2=(a+b)^2}$

$$=x^2-2y$$

(イ)　$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$　　$\boxed{a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)}$

$$=(a+b)\{(a^2+b^2)-ab\}$$
$$=x\{(x^2-2y)-y\}$$
$$=x^3-3xy$$

注）上の2つの関係式はとてもよく使うので覚える！

a，b の対称式は基本対称式 $a+b$，ab で表せることが知られている。

例2.　$x=\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$，$y=\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ のとき，$x+y=$ア$\boxed{}$，$xy=$イ$\boxed{}$ であるから，
$x^2+y^2=$ウ$\boxed{}$，$x^3+y^3=$エ$\boxed{}$，となる。

(ア)　$x+y=\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

分数式の通分

$$=\frac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2+(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}$$

$$=\frac{(3-2\sqrt{6}+2)+(3+2\sqrt{6}+2)}{3-2}=10$$

(イ)　$xy=\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\cdot\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=1$

(ウ)　$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=10^2-2\cdot1=98$

(エ)　$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)=10^3-3\cdot1\cdot10=970$

(1)　次の式A，Bをxについての整式とみて，AをBで割った商と余りを求めよ。　　$A=2x^3+10y^3-3xy^2$，$B=x+2y$

(2)　$2x^2-x-1$で割ると，商が$4x+5$，余りが$-2x+1$である整式Aを求めよ。

次の分数式を約分して，既約分数式にせよ。

(3)　$\dfrac{4a^2bc^3}{12ab^2c}$

(4)　$\dfrac{a^4+a^3-2a^2}{a^2-4}$

次の計算をせよ。

(5)　$\dfrac{8x^3z}{9bc^3}\times\dfrac{27abc}{4xyz^2}$

(6)　$\dfrac{x^2+5x+4}{x^2+2x}\div\dfrac{x+4}{x}\times\dfrac{1}{x+1}$

次の計算をせよ。

(7) $\dfrac{2x+7}{x^2+6x+8}-\dfrac{x-4}{x^2-4}$

(8) $\dfrac{1}{(x+1)(x+3)}+\dfrac{1}{(x+3)(x+5)}+\dfrac{1}{(x+5)(x+7)}$

(9) $x=\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$, $y=\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$ のとき，$x+y$，xy，x^2+y^2，x^3+y^3，x^3-y^3 の値を求めよ。

(1)　次の式 A, B を x についての整式とみて，A を B で割った商と余りを求めよ。　$A=2x^3+10y^3-3xy^2$, $B=x+2y$

(2)

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2x^2-4xy+5y^2 \\
\hline
x+2y & 2x^3 \qquad -3xy^2+10y^3 \\
 & 2x^3+4x^2y \\
\hline
 & -4x^2y-3xy^2 \\
 & -4x^2y-8xy^2 \\
\hline
 & 5xy^2+10y^3 \\
 & 5xy^2+10y^3 \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

商 $2x^2-4xy+5y^2$, 余り 0

(2)　$2x^2-x-1$ で割ると，商が $4x+5$, 余りが $-2x+1$ である整式 A を求めよ。

条件から，次の等式が成り立つ。

$A=(2x^2-x-1)\times(4x+5)-2x+1$

ゆえに　$A=(8x^3+10x^2-4x^2-5x-4x-5)-2x+1$

$=8x^3+6x^2-9x-5-2x+1$

$\mathbf{=8x^3+6x^2-11x-4}$

次の分数式を約分して，既約分数式にせよ。

(3)　$\dfrac{4a^2bc^3}{12ab^3c}$　$=\dfrac{4abc\cdot ac^2}{4abc\cdot 3b^2}=\dfrac{ac^2}{3b^2}$

(4)　$\dfrac{a^4+a^3-2a^2}{a^2-4}$　$=\dfrac{a^2(a^2+a-2)}{(a+2)(a-2)}=\dfrac{a^2(a+2)(a-1)}{(a+2)(a-2)}$

$=\dfrac{a^2(a-1)}{a-2}$

次の計算をせよ。

(5)　$\dfrac{8x^3z}{9bc^3}\times\dfrac{27abc}{4xyz^2}$　$=\dfrac{2^3\cdot 3^3}{2^2\cdot 3^2}\times a\times\dfrac{b}{b}\times\dfrac{c}{c^3}\times\dfrac{x^3}{x}\times\dfrac{1}{y}\times\dfrac{z}{z^2}=\dfrac{6ax^2}{c^2yz}$

(6)　$\dfrac{x^2+5x+4}{x^2+2x}\div\dfrac{x+4}{x}\times\dfrac{1}{x+1}$　$=\dfrac{(x+1)(x+4)}{x(x+2)}\times\dfrac{x}{x+4}\times\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{1}{x+2}$

次の計算をせよ。

(7) $\dfrac{2x+7}{x^2+6x+8}-\dfrac{x-4}{x^2-4}$

$$=\frac{2x+7}{(x+2)(x+4)}-\frac{x-4}{(x+2)(x-2)}$$
$$=\frac{(2x+7)(x-2)}{(x+2)(x-2)(x+4)}-\frac{(x-4)(x+4)}{(x+2)(x-2)(x+4)}$$
$$=\frac{(2x+7)(x-2)-(x-4)(x+4)}{(x+2)(x-2)(x+4)}$$
$$=\frac{x^2+3x+2}{(x+2)(x-2)(x+4)}=\frac{(x+1)(x+2)}{(x+2)(x-2)(x+4)}$$
$$=\underline{\frac{x+1}{(x-2)(x+4)}}$$

(8) $\dfrac{1}{(x+1)(x+3)}+\dfrac{1}{(x+3)(x+5)}+\dfrac{1}{(x+5)(x+7)}$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+1}-\cancel{\frac{1}{x+3}}\right)+\frac{1}{2}\left(\cancel{\frac{1}{x+3}}-\cancel{\frac{1}{x+5}}\right)+\frac{1}{2}\left(\cancel{\frac{1}{x+5}}-\frac{1}{x+7}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+7}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{x+7-(x+1)}{(x+1)(x+7)}$$
$$=\underline{\frac{3}{(x+1)(x+7)}}$$

(9) $x=\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$, $y=\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$ のとき，$x+y$，xy，x^2+y^2，x^3+y^3，x^3-y^3 の値を求めよ。

$$x+y=\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}=\frac{(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2+(\sqrt{5}-\sqrt{3})^2}{(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{3})}$$
$$=\frac{(5+2\sqrt{15}+3)+(5-2\sqrt{15}+3)}{5-3}\underline{=8}$$
$$xy=\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}\underline{=1}$$
$$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=8^2-2\cdot1\underline{=62}$$
$$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)=8^3-3\cdot1\cdot8\underline{=488}$$

また $x-y=\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}-\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$

$$=\frac{(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2-(\sqrt{5}-\sqrt{3})^2}{(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{3})}$$
$$=\frac{(5+2\sqrt{15}+3)-(5-2\sqrt{15}+3)}{5-3}$$
$$=2\sqrt{15}$$

よって $x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)$

$$=2\sqrt{15}(62+1)\underline{=126\sqrt{15}}$$