# 第4回授業資料　　2020.2.9

**問題1**　$0 \leqq \theta \leqq \pi$ において，次の関数の最大値と最小値，およびそのときの $\theta$ の値を求めよ。

三角関数の合成の利用

(1)　$y = \sin\theta - \sqrt{3}\cos\theta$　　(2)　$y = \cos\theta - \sin\theta$

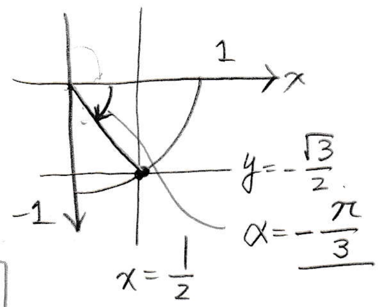
$$a\sin\theta + b\cos\theta = \sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)$$

$$\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad \sin\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$= \underset{\substack{\shortparallel \\ a}}{1} \times \sin\theta + \underset{\substack{\shortparallel \\ b}}{(-\sqrt{3})} \times \cos\theta$$

① $r = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = \underline{2}$

② $\cos\alpha = \dfrac{a}{r} = \dfrac{1}{2}$，$\sin\alpha = \dfrac{b}{r} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

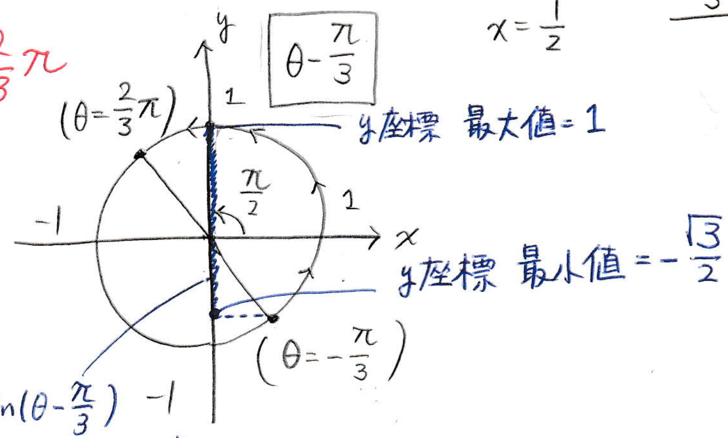



$= 2\sin\left(\theta - \dfrac{\pi}{3}\right)$

$0 \leqq \theta \leqq \pi$ より．

$-\dfrac{\pi}{3} \leqq \theta - \dfrac{\pi}{3} \leqq \dfrac{2}{3}\pi$

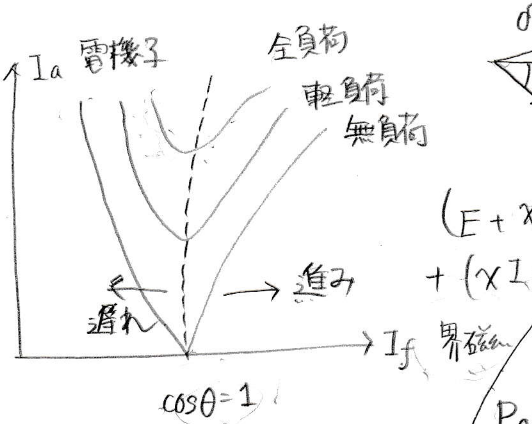
$\boxed{\theta - \frac{\pi}{3}}$

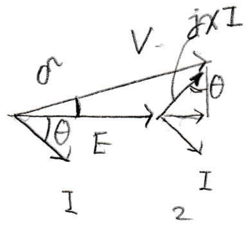



$-\dfrac{\sqrt{3}}{2} \leqq \sin\left(\theta - \dfrac{\pi}{3}\right) \leqq 1$

$\therefore -\sqrt{3} \leqq 2\sin\left(\theta - \dfrac{\pi}{3}\right) \leqq 2$

$\theta - \dfrac{\pi}{3} = -\dfrac{\pi}{3} \to \underline{\theta = 0}$ のとき、$\underline{最小値\ -\sqrt{3}}$，$\theta - \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\pi}{2} \to \underline{\theta = \dfrac{5}{6}\pi}$ のとき、$\underline{最大値\ 2}$




$(E + xI\sin\theta)^2 + (xI\cos\theta)^2 = V^2$

負荷 $P_0 = IE\cos\theta$（一定）

$I = I(\theta)$ に変形

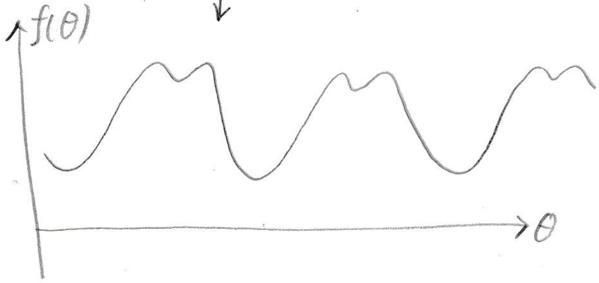
# 変数の置き換え

**問題2** 関数 $f(\theta)=\sin^2\theta+\cos\theta$ の最大値と最小値，およびそのときの $\theta$ の値を求めよ。ただし，$-\pi \leqq \theta < \pi$ とする。

$$f(\theta)=\frac{1-\cos 2\theta}{2}+\cos\theta$$

$$=\frac{1}{2}+\cos\theta-\frac{1}{2}\cos 2\theta$$

周期関数になる。



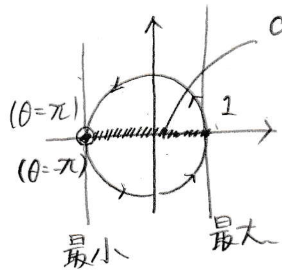

$$f(\theta)=\underbrace{\sin^2\theta}_{1-\cos^2\theta}+\cos\theta$$

$$=-\underbrace{\cos^2\theta}_{t^2}+\underbrace{\cos\theta}_{t}+1$$

$t=\cos\theta$ とおくと、$-\pi \leqq \theta < \pi$ より

変数の置き換え

$-1 \leqq t \leqq 1$ （← $f(t)$ の定義域）




$$f(\theta)=f(t)=\overset{a}{-}t^2+t+1$$ ※$a=-1<0$ で上に凸

$$=-(t^2-t)+1$$

$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$

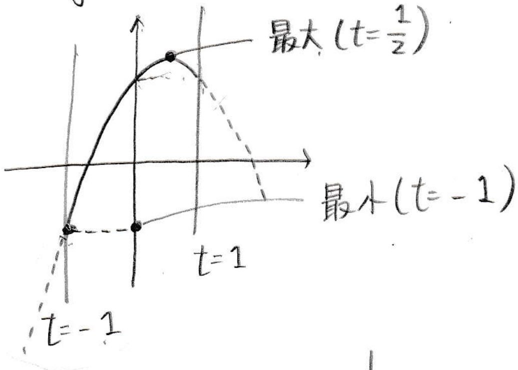
$$=-\left\{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2-\underbrace{\left(-\frac{1}{2}\right)^2}_{b^2}\right\}+1$$

$$\underset{a}{t^2}+2\times t\times\underset{b}{\left(-\frac{1}{2}\right)}+\underset{b^2}{\left(-\frac{1}{2}\right)^2}$$

$$=-\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}+1$$

$$=-\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{4}$$

$y=-t^2$ を $x$ 方向へ $\frac{1}{2}$，$y$ 方向へ $\frac{5}{4}$ 平行移動




◎ 2次関数の平方完成

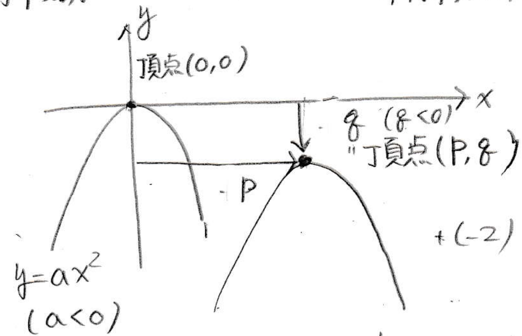
一般形 $y=ax^2+bx+c$

⇓ 平方完成

標準形 $y=a(x-p)^2+q$

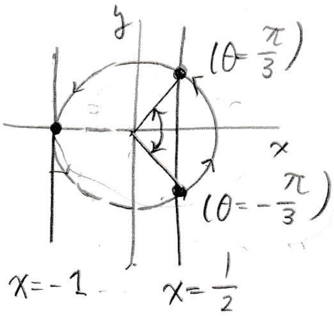
$x$方向$+p$

$y=f(x) \xrightarrow[y方向+q]{} y-q=f(x-p)$ 平行移動後の式




$t=\frac{1}{2}$ のとき、$\cos\theta=\frac{1}{2}$，つまり $\theta=\pm\frac{\pi}{3}$ のとき
$(-\pi \leqq \theta < \pi)$

最大値 $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{4}$




$t=-1$ のとき，$\cos\theta=-1$，つまり $\theta=-\pi$ のとき

最小値 $f(-1)=-1$

倍角の公式と三角関数の合成を利用

**問題3** $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，関数 $y = \sin^2\theta + 4\sin\theta\cos\theta + 5\cos^2\theta$ について

(1) $y$ を $\sin 2\theta$, $\cos 2\theta$ の式で表せ。

(2) $y$ の最大値と最小値，およびそのときの $\theta$ の値を求めよ。

(1) 公式 $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta \Rightarrow \sin\theta\cos\theta = \frac{1}{2}\sin 2\theta$

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$$
$$= 2\cos^2\theta - 1 \Rightarrow \cos^2\theta = \frac{1}{2}(1+\cos 2\theta),\ \sin^2\theta = \frac{1}{2}(1-\cos 2\theta)$$
$$= 1 - 2\sin^2\theta$$

$$y = \sin^2\theta + 4\sin\theta\cos\theta + 5\cos^2\theta$$
$$= \frac{1}{2}(1-\cos 2\theta) + \cancel{4}^{2} \times \frac{1}{\cancel{2}}\sin 2\theta + 5 \times \frac{1}{2}(1+\cos 2\theta)$$
$$= 2\sin 2\theta + 2\cos 2\theta + 3$$

公式 $a\sin\theta + b\cos\theta = \sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)$ に変形

公式では $\theta$ だが角が同じならOK！

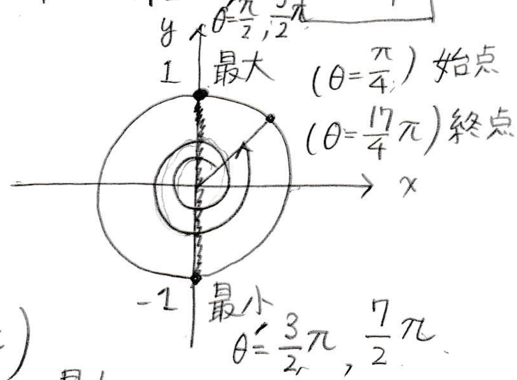
(2) $\underset{a}{2}\sin 2\theta + \underset{b}{2}\cos 2\theta = 2\sqrt{2}\sin\left(2\theta + \frac{\pi}{4}\right)$ 合成

① $r$ を計算 $r = \sqrt{2^2+2^2} = 2\sqrt{2}$

② $\alpha$ を解く $\cos\alpha = \frac{a}{r} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sin\alpha = \frac{b}{r} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\alpha = \frac{\pi}{4}$

$\theta' = \boxed{2\theta + \frac{\pi}{4}}$




$0 \leqq \theta < 2\pi$ より

$$\frac{\pi}{4} \leqq 2\theta + \frac{\pi}{4} \leqq 2 \times 2\pi + \frac{\pi}{4} = \frac{17}{4}\pi$$

$$-1 \leqq \sin\left(2\theta + \frac{\pi}{4}\right) \leqq 1$$

$\left(2\theta + \frac{\pi}{4} = \frac{3}{2}\pi, \frac{7}{2}\pi\right)$ $\left(2\theta + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}, \frac{5}{2}\pi\right)$

最小 最大

$\therefore\ -2\sqrt{2} + 3 \leqq y = 2\sqrt{2}\sin\left(2\theta + \frac{\pi}{4}\right) + 3 \leqq 2\sqrt{2} + 3$

$\left(\theta = \frac{5}{8}\pi, \frac{13}{8}\pi\right)$ $\left(\theta = \frac{\pi}{8}, \frac{9}{8}\pi\right)$

※ $\theta$ について、

$$2\theta + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$
$$2\theta = \frac{\pi}{4}$$
$$\theta = \frac{\pi}{8}$$

# 変数の置き換え

**問題4**　$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，関数 $y = \sin 2\theta - 2\sin\theta - 2\cos\theta + 1$ について

(1)　$\sin\theta + \cos\theta = t$ とおくとき，$y$ を $t$ の式で表せ。また，$t$ のとり得る値の範囲を求めよ。

和

(2)　$y$ の最大値，最小値，およびそのときの $\theta$ の値を求めよ。

解き方の方針

$$-2\sin\theta - 2\cos\theta = -2(\sin\theta + \cos\theta) = -2t \longrightarrow$$ 代入して $t$ の関数

$$\sin 2\theta = \underbrace{2\sin\theta\cos\theta}_{積}$$

$t = \sin\theta + \cos\theta$

⇓ 2乗

$$t^2 = (\sin\theta + \cos\theta)^2 = \cos^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta + \sin^2\theta$$

1

$$t^2 = 1 + 2\sin\theta\cos\theta$$

$$\sin\theta\cos\theta = \frac{1}{2}(t^2 - 1)$$ と変形

$$t = \sin\theta + \cos\theta = \sqrt{2}\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)$$ ⇒ $t$ の定義域が求まる

合成

(1)

$$y = 2 \times \frac{1}{2}(t^2 - 1) - 2t + 1$$
$$= t^2 - 2t$$

$t = \sin\theta + \cos\theta$

$= \sqrt{1^2 + 1^2}\sin(\theta + \alpha)$ ← $\cos\alpha = \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$= \sqrt{2}\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)$

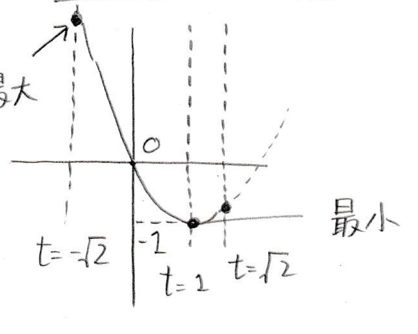
$\frac{\pi}{4} \leqq \theta + \frac{\pi}{4} < \frac{9}{4}\pi$ より，$-1 \leqq \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) \leqq 1$

$\therefore$ $-\sqrt{2} \leqq t \leqq \sqrt{2}$

(2)　(1)より，

$y = t^2 - 2t$ $(= f(t)$ とおく$)$

$= (t-1)^2 - 1$




右図より，　$t = 1$，$\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

つまり，$\theta = 0, \frac{\pi}{2}$ のとき，最小値 $f(1) = -1$

$t = -\sqrt{2}$，$\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = -1$

つまり，$\theta = \frac{5}{4}\pi$ のとき，最大値 $f(-\sqrt{2}) = 2 + 2\sqrt{2}$