第17回授業資料

2019.8.1

やさしい高校数学（数Ⅲ）　学習範囲　P246～265、303-346

1章.不定形の極限の求め方

極限はある値に**限りなく近づけていったときの数値**のことで、

$\lim_{x \to a} f(x)$ や $\lim_{n \to a} a_n$ という記号を使って書く決まりがある。

注　$\lim_{x \to a} f(x)$ は実数全体を扱う関数の極限、$\lim_{n \to a} a_n$ は整数全体を扱う数列の極限、という違いがあるが、今回は区別せずに扱う。

$\lim_{x \to 2} x = 2$ や $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$ のように、すぐに極限値が計算できるものは少ない。

ほとんどの極限の問題は次のような**不定形の極限**の形になっている。

不定形の極限

$$\frac{0}{0} \quad \frac{\infty}{\infty} \quad \infty - \infty$$

➡ **うまく式変形をして不定形を崩す**

注　**上記の値は1ではない！**

例1

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n+2}{n} = \lim_{n \to \infty}\left(1 + \frac{2}{n}\right) = 1$$

$\frac{\infty}{\infty}$ の不定形

分子を分けて不定形を崩す

例2

$$\lim_{n \to \infty} \frac{2n-1}{3n-2} = \lim_{n \to \infty} \frac{\frac{2n-1}{n}}{\frac{3n-2}{n}} = \lim_{n \to \infty} \frac{2 - \frac{1}{n}}{3 - \frac{2}{n}} = \frac{2}{3}$$

$\frac{\infty}{\infty}$ の不定形

分母と分子を n で割って不定形を崩す

例3　$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x}$ を求めよ

$\frac{0}{0}$ の不定形

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{(\sqrt{1+x}-1)\boxed{(\sqrt{1+x}+1)}}{x\boxed{(\sqrt{1+x}+1)}}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{(1+x)-1}{x(\sqrt{1+x}+1)} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{x(\sqrt{1+x}+1)}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt{1+x}+1} = \frac{1}{2}$$

ポイント

共役なものを分母と分子に掛けて分母を有理化

極限値の性質　極限は四則演算ができる！

数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ が収束し，$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ のとき，

1. $\lim_{n\to\infty} ka_n = k\alpha$　　ただし，k は定数
2. $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \alpha + \beta$,　$\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \alpha - \beta$
3. $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \alpha\beta$,　$\beta \neq 0$ ならば，$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\alpha}{\beta}$

2章.等比数列の極限

a, ar, ar^2, ……, ar^{n-1}, ……

を，初項 a，公比 r の **無限等比数列** という。

$r=2$ のとき，数列は 2, 4, 8, 16, ……　➡　**正の無限大に発散**

$r=\frac{1}{2}$ のとき，数列は $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, ……　➡　**0に収束**

*r=1*のとき、　数列は 1,1,1,1,･･･　➡　**1に収束**

*r=-2*のとき、　数列は -2,4,-8,16,-32,･･･　➡　**正と負の間を振動**

$\{r^n\}$ の極限

$r>1$ のとき，$\lim_{n\to\infty} r^n = \infty$

$r=1$ のとき，$\lim_{n\to\infty} r^n = 1$

$|r|<1$ のとき，$\lim_{n\to\infty} r^n = 0$

$r \leqq -1$ のとき，$\{r^n\}$ は振動する

例1　$\frac{(\sqrt{5})^n}{2^n} = \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^n$ と変形すると、$r = \frac{\sqrt{5}}{2} > 1$　　$\lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{5})^n}{2^n} = \infty$

例2　$\lim_{n\to\infty} \frac{3^n - 2^n}{3^n + 2^n}$ を求めよ。

分母，分子をそれぞれ 3^n で割って，

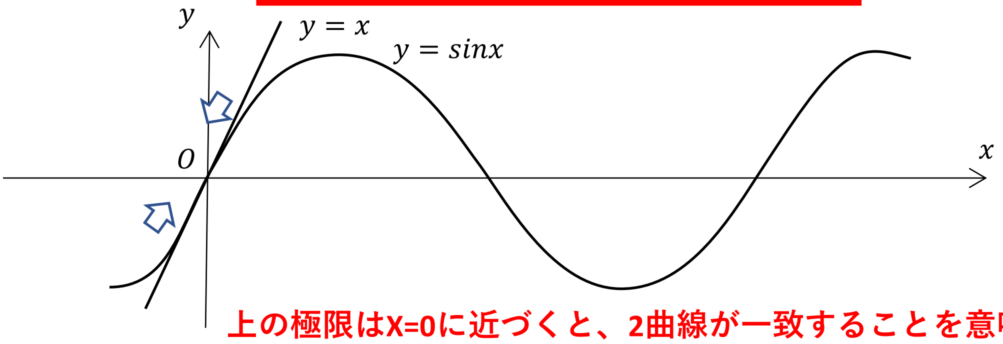
$$\lim_{n\to\infty} \frac{3^n - 2^n}{3^n + 2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n}{\underline{1 + \left(\frac{2}{3}\right)^n}} = 1$$

絶対値の大きい底で割る

3章.三角関数の極限

$\lim_{x\to0}\frac{sinx}{x}$ の極限

$$\boxed{\lim_{x\to0}\frac{sinx}{x}=1}$$



上の極限はX=0に近づくと、2曲線が一致することを意味している

例1 $\left[\lim_{x\to0}\frac{\sin ax}{x}\right]$ $\lim_{x\to0}\frac{\sin 3x}{x}$ を調べてみよう。

$3x=\theta$ とすると，$x\to0$ のとき $\theta\to0$ であるから，

変数の変換

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin 3x}{x}=\lim_{x\to0}\left(3\times\frac{\sin 3x}{3x}\right)$$
$$=\lim_{\theta\to0}\left(3\times\frac{\sin\theta}{\theta}\right)$$
$$=3\times1=3$$

$$\boxed{\lim_{x\to0}\frac{sinx}{x}=1}$$

例2 $\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}$ を調べよ。

分母，分子に $1+\cos x$ を掛け，$\frac{\sin x}{x}$ の形を作る。

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{(1-\cos x)\boxed{(1+\cos x)}}{x^2\boxed{(1+\cos x)}}$$

← 分母、分子に $1+cosx$ を掛ける

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin^2 x}{x^2(1+\cos x)}$$

← $\boxed{1-cos^2x=sin^2x}$

$$=\lim_{x\to0}\left\{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\cdot\frac{1}{1+\cos x}\right\}$$
$$=1^2\times\frac{1}{1+1}$$
$$=\frac{1}{2}$$

$$\boxed{\lim_{x\to0}\left(\frac{sinx}{x}\right)^2=1}$$

$$\boxed{cos0=1}$$

4章.指数対数の極限

自然対数の底*e*は微分方程式を解くときなどに、よく現れる数字であり

e=2.718・・・ で表される無理数。

自然対数の底*e*の定義①

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$$

自然対数の底*e*の定義②

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$$

どちらも同じ

自然対数の底*e*の入る極限

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-1}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\log(1+x)^{\frac{1}{x}}=1$$

例1

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{2x}\times 2=1\times 2=1$$

文字をそろえると極限の公式の形になる

$$\boxed{a^{bc}=\left(a^{b}\right)^{c}}$$

例2

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{x/2}\right)^{\frac{1}{x/2}}\right\}^{\frac{1}{2}}=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$$

文字をそろえると極限の公式の形になる

次の極限値を求めなさい

(1) $\lim_{n \to \infty} \frac{2n^2 - 3}{n^2 + 1}$

(2) $\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{2}}{x - 1}$

(3) $\lim_{n \to \infty} 4^n - (-3)^n$

(4) $\lim_{n \to \infty} \frac{2^n + 2^{-n}}{2^n - 2^{-n}}$

(5) $\lim_{x \to 0} \frac{e^{x} - e^{-x}}{x}$

(6) $\lim_{x \to 0} \frac{x - \sin 2x}{\sin 3x}$

次の極限値を求めなさい

(1) $\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2-3}{n^2+1}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2-3}{n^2+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2-\frac{3}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}} = \underline{\mathbf{2}}$$

(2) $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}{x-1}$

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x+1)-2}{(x-1)(\sqrt{x+1}+\sqrt{2})}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$= \underline{\frac{\sqrt{\mathbf{2}}}{\mathbf{4}}}$$

(3) $\lim_{n\to\infty} 4^n - (-3)^n$

$$= \lim_{n\to\infty} 4^n \left\{1 - \left(-\frac{3}{4}\right)^n\right\} = \infty \times (1-0) = \underline{\infty}$$

(4) $\lim_{n\to\infty} \frac{2^n + 2^{-n}}{2^n - 2^{-n}}$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{2^{2n}}}{1-\frac{1}{2^{2n}}} = \frac{1+0}{1-0} = \underline{1}$$

(5) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{x}$

$f(x)=e^x$ とおくと　$f'(x)=e^x$ であるから

$$(\text{与式})=\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x-1}{x}+\frac{e^{-x}-1}{-x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x-e^0}{x-0}+\frac{e^{-x}-e^0}{-x-0}\right)$$

$$=f'(0)+f'(0)=1+1=\mathbf{2}$$

(6) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin 2x}{\sin 3x}$

$$(\text{与式})=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\sin 3x}-\frac{\sin 2x}{\sin 3x}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{3x}{\sin 3x}\cdot\frac{1}{3}-\frac{\sin 2x}{2x}\cdot\frac{3x}{\sin 3x}\cdot\frac{2}{3}\right)$$

$$=1\cdot\frac{1}{3}-1\cdot 1\cdot\frac{2}{3}=-\mathbf{\frac{1}{3}}$$