第3回復習用問題

2020.2.6

問題1. (1) 下の式は三角関数の加法定理の公式を示している。
下式で$\alpha=\beta$と置くことにより、倍角の公式(授業資料1ページ)を証明しなさい。

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

(2) 正弦(sin)と余弦(cos)の加法定理から、積を和に直す公式を証明しなさい。
また、$\alpha+\beta=$A、$\alpha-\beta=$Bと置くことにより、和を積に直す公式を証明しなさい。

(1) $\alpha=\beta$とおくことにより、

$$\sin(\alpha+\alpha)=\sin 2\alpha=\sin\alpha\cos\alpha+\cos\alpha\sin\alpha$$

$$\therefore\ \underline{\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha}$$

$$\cos(\alpha+\alpha)=\cos 2\alpha=\cos\alpha\cos\alpha-\sin\alpha\sin\alpha$$

$$\therefore\ \underline{\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}$$

また、 $\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha$, $\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha$より、

$$\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=(1-\sin^2\alpha)-\sin^2\alpha=\underline{1-2\sin^2\alpha}$$

$$\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=\cos^2\alpha-(1-\cos^2\alpha)=\underline{2\cos^2\alpha-1}$$

$$\tan(\alpha+\alpha)=\tan 2\alpha=\frac{\tan\alpha+\tan\alpha}{1-\tan\alpha\tan\alpha}$$

$$\therefore\ \underline{\tan 2\alpha}=\underline{\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}}$$

(2)

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta \quad -①$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta \quad -②$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta \quad -③$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta \quad -④$$

①+②より、 $\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=2\sin\alpha\cos\beta \quad -⑤$

$$\therefore\ \underline{\sin\alpha\cos\beta}=\underline{\frac{1}{2}\left\{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right\}}$$

①−②より、 $\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\sin\beta \quad -⑥$

$$\therefore\ \underline{\cos\alpha\cos\beta}=\underline{\frac{1}{2}\left\{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)\right\}}$$

③+④より、

$$\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\cos\beta \quad —⑦$$

$$\therefore\ \underline{\cos\alpha\cos\beta}=\underline{\frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\}}$$

③−④より、

$$\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)=-2\sin\alpha\sin\beta \quad —⑧$$

$$\therefore\ \underline{\sin\alpha\sin\beta}=\underline{-\frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\}}$$

⑤〜⑧式において、

$\alpha+\beta=A$, $\alpha-\beta=B$ とおくと、

$\alpha=\dfrac{A+B}{2}$, $\beta=\dfrac{A-B}{2}$ と直せるので、

$$\underline{\sin A+\sin B}=\underline{2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}}$$

$$\underline{\sin A-\sin B}=\underline{2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}}$$

$$\underline{\cos A+\cos B}=\underline{2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}}$$

$$\underline{\cos A-\cos B}=\underline{-2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}}$$

問題3.　$0 \leqq \theta \leqq \pi$ のとき，次の方程式を解け。

$$\sin\theta+\sin 2\theta+\sin 3\theta=0$$

$$\sin\theta+\sin 3\theta = 2\sin\frac{\theta+3\theta}{2}\cos\frac{\theta-3\theta}{2}$$

$$= 2\sin 2\theta \times \cos(-\theta)$$

$$= 2\sin 2\theta\cos\theta$$ なので、

与式は、 $\sin 2\theta + 2\sin 2\theta\cos\theta = 0$ と変形できる。

$$\sin 2\theta \times (2\cos\theta + 1) = 0$$

$\therefore$ $\sin 2\theta = 0$ ，または $\cos\theta = -\frac{1}{2}$

$0 \leqq \theta \leqq \pi$ より、 $0 \leqq 2\theta \leqq 2\pi$

したがって、 $\sin 2\theta = 0$ の解は、

$$2\theta = 0, \pi, 2\pi$$

$$\therefore \theta = 0, \frac{\pi}{2}, \pi$$

$\cos\theta = -\frac{1}{2}$ の解は、

$$\theta = \frac{2}{3}\pi$$

ゆえに、解は $\theta = 0, \frac{\pi}{2}, \frac{2}{3}\pi, \pi$

問題2.

(1) 積 ⟶ 和，和 ⟶ 積の公式を用いて，次の値を求めよ。

(ア) $\cos 45^\circ \sin 75^\circ$ (イ) $\cos 105^\circ - \cos 15^\circ$ (ウ) $\sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 80^\circ$

(ア) $\cos 45^\circ \sin 75^\circ = \frac{1}{2}\{\sin(45^\circ+75^\circ) - \sin(45^\circ-75^\circ)\} = \frac{1}{2}\{\sin 120^\circ - \sin(-30^\circ)\}$

$= \frac{1}{2}\left\{\frac{\sqrt{3}}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right)\right\} = \underline{\frac{\sqrt{3}+1}{4}}$

(イ) $\cos 105^\circ - \cos 15^\circ = -2\sin\frac{105^\circ+15^\circ}{2}\sin\frac{105^\circ-15^\circ}{2} = -2\sin 60^\circ \sin 45^\circ$

$= -2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \underline{-\frac{\sqrt{6}}{2}}$

(ウ) 与式) $= -\frac{1}{2}\{\cos(20^\circ+40^\circ) - \cos(20^\circ-40^\circ)\}\sin 80^\circ = -\frac{1}{4}\sin 80^\circ + \frac{1}{2}\cos 20^\circ \sin 80^\circ$

$= -\frac{1}{4}\sin 80^\circ + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\{\sin(20^\circ+80^\circ) - \sin(20^\circ-80^\circ)\} = -\frac{1}{4}\sin 80^\circ + \frac{1}{4}\sin 100^\circ - \frac{1}{4}\sin(-60^\circ)$

$= \frac{1}{4}\cancel{\sin 80^\circ} - \frac{1}{4}\cancel{\sin 80^\circ} + \frac{1}{4}\sin 60^\circ = \underline{\frac{\sqrt{3}}{8}}$

(2) $\triangle ABC$ において，次の等式が成り立つことを証明せよ。

$$\cos A + \cos B - \cos C = 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} - 1$$

$A+B+C=\pi$ より，$C = \pi - (A+B)$

よって，$\cos C = \cos\{\pi - (A+B)\} = -\cos(A+B) = -\cos 2 \times \frac{A+B}{2}$

$= -\left(2\cos^2\frac{A+B}{2} - 1\right)$

また、$\cos A + \cos B = 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$

これより、与式) $= 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} - \left\{-\left(2\cos^2\frac{A+B}{2} - 1\right)\right\}$

$= 2\cos\frac{A+B}{2}\left(\cos\frac{A+B}{2} + \cos\frac{A-B}{2}\right) - 1$

ここで $\cos\frac{A+B}{2} = \cos\left(\frac{\pi - C}{2}\right) = \sin\frac{C}{2}$

$\cos\frac{A+B}{2} + \cos\frac{A-B}{2} = 2\cos\frac{\frac{A+B}{2}+\frac{A-B}{2}}{2}\cos\frac{\frac{A+B}{2}-\frac{A-B}{2}}{2} = 2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}$ より

$= 2\sin\frac{C}{2} \times 2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2} - 1$

$= \underline{4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} - 1}$

<u>問題3.</u>　$0 \leqq \theta \leqq \pi$ のとき，次の方程式を解け。

$$\sin\theta + \sin 2\theta + \sin 3\theta = 0$$

$$\sin\theta + \sin 3\theta = 2\sin\frac{\theta+3\theta}{2}\cos\frac{\theta-3\theta}{2}$$

$$= 2\sin 2\theta \times \cos(-\theta)$$

$$= 2\sin 2\theta\cos\theta$$ なので、

与式は、 $\sin 2\theta + 2\sin 2\theta\cos\theta = 0$ と変形できる。

$$\sin 2\theta \times (2\cos\theta + 1) = 0$$

$\therefore$ $\sin 2\theta = 0$，または $\cos\theta = -\frac{1}{2}$

$0 \leqq \theta \leqq \pi$ より、 $0 \leqq 2\theta \leqq 2\pi$

したがって、 $\sin 2\theta = 0$ の解は、

$$2\theta = 0,\ \pi,\ 2\pi$$

$$\therefore\ \theta = 0,\ \frac{\pi}{2},\ \pi$$

$\cos\theta = -\frac{1}{2}$ の解は、

$$\theta = \frac{2}{3}\pi$$

ゆえに、解は $\theta = 0,\ \frac{\pi}{2},\ \frac{2}{3}\pi,\ \pi$

問題4.

電力を計算する公式はP=I(電流)×V(電圧)で与えられるが、交流では電流と電圧がともに時間変化する。また、回路の素子によって位相のずれ(遅れ・進み)があることにも注意をしなければならない。
電源電圧が $v = V_m \sin \omega t$ で与えられる場合、電流成分を表す式は抵抗素子Rでは

$i = I_R \sin \omega t$ 、コンデンサ素子では $i = I_C \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = I_C \cos \omega t$、コイル素子では

$i = I_L \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = -I_L \cos \omega t$ と書くことができる。

したがって、1周期での平均電力は $\bar{P} = \frac{1}{(2\pi/\omega)} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} i \times v \, dt$ を計算することができる。

ここで現れる $\int_0^{2\pi} \sin t \times \sin t \, dt$ と $\int_0^{2\pi} \sin t \times \cos t \, dt$ を計算すると、後者は0になる。

このように1周期積分で0になる関数同士はベクトルの内積の計算に似た性質があることから、**直交関数**と呼ばれている。
そのため、抵抗素子では1周期で電力が0にならずに有効電力、コンデンサやコイル素子では平均電力0で無効電力と呼ばれている。

1周期での平均電力を三角関数の半角の公式 $\sin^2 t = \frac{1 - \cos 2t}{2}$ と $\mathrm{sint}\,\mathrm{cost} = \frac{1}{2}\sin 2t$

と、グラフを利用して求めなさい。

まずは、$\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} IV \sin^2 \omega t \, dt = \frac{IV}{\omega} \int_0^{2\pi} \sin^2 x \, dx$

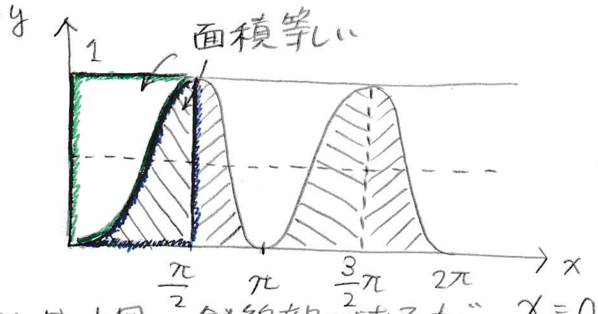
$x = \omega t$ と置換積分
(今回は詳細の説明は略)

$\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} IV \sin \omega t \cos \omega t \, dt = \frac{IV}{\omega} \int_0^{2\pi} \sin x \cos x \, dx$ と変形する

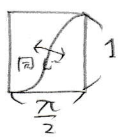
有効電力 $\bar{P}$ について、

$\int_0^{2\pi} \sin^2 x \, dx$ の中身 $\sin^2 x$ は $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} = -\frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{2}$

これをグラフに図示すると、



$\int_0^{2\pi} \sin^2 x \, dx$ は上図の斜線部であるが、$x = 0 \sim \frac{\pi}{2}$ の青枠内と緑枠内の面積は等しいので、(青枠部の面積) $= 1 \times \frac{\pi}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\pi}{4}$



$\therefore \int_0^{2\pi} \sin^2 x \, dx =$ (青枠部の面積) $\times 4 = \frac{\pi}{4} \times 4 = \pi$

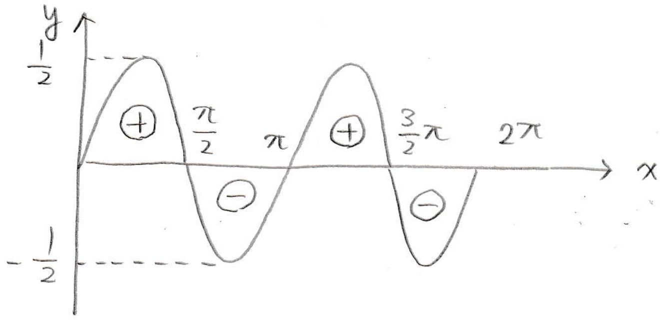
$\therefore \bar{P} = \frac{1}{\frac{2\pi}{\omega}} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} IV \sin^2 t \, dt = \frac{1}{\frac{2\pi}{\omega}} \times \frac{IV}{\omega} \times \pi = \frac{1}{2} IV$ ← 最大積の半分

実効値は $I_e = \frac{1}{\sqrt{2}} I$, $V_e = \frac{1}{\sqrt{2}} V$

無効電力Qについて

同様にして、$\int_0^{2\pi} \sin x \cos x \, dx$ を計算する。

$\sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$ と変形できるため、グラフに図示すると、



$\int_0^{2\pi} \sin x \cos x \, dx$ は上図の曲線とx軸に囲まれた符号付き面積であるが、1周期で⊕と⊖が相殺して0となる。

∴ $\overline{P} = 0$