第16回授業資料

2019.7.25

やさしい高校数学（数Ⅱ+B) 学習範囲　P525～575

1章-1.定積分の方法

定積分の計算

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

前回の授業で学習した**不定積分は**

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C \quad C：積分定数$$

という式の通り**「x」の式で、積分定数Cが入っている**のが特徴。

定積分は四角枠の式の通り、xにbとaという**定数を順番に代入した式。**
そのため、**定積分**は**定数**である。

$$\int_a^b f(x)dx$$

積分区間
「どこからどこまで?」

積分変数
「どんな変数で?」

被積分関数
「どんな関数を?」

例1　［定積分］ 次の定積分を求めてみよう。

$$\int_1^2 (2x+3)dx = \Big[x^2+3x\Big]_1^2 = (2^2+3\cdot 2)-(1^2+3\cdot 1) = 6$$

不定積分を求めてカッコでくくる　　　上端と下端を順に代入して引く

注　定積分の値は，積分する変数の選び方によらない。たとえば，

$$\int_1^2 (2x+3)dx = \int_1^2 (2t+3)dt$$

例2　定積分 $\int_0^2 |x-1|dx$ を求めよ。

注　$x<1$ のとき，$|x-1| = -(x-1) = 1-x$　　　$x \geqq 1$ のとき，$|x-1| = x-1$

絶対値付きの積分は中身が負のときと、正のときで分けて計算する

よって，

$$\int_0^2 |x-1|dx = \int_0^1 |x-1|dx + \int_1^2 |x-1|dx$$
$$= \int_0^1 (1-x)dx + \int_1^2 (x-1)dx$$
$$= \left[x-\frac{1}{2}x^2\right]_0^1 + \left[\frac{1}{2}x^2-x\right]_1^2 = 1$$

1章-2.定積分と微分の関係

定積分と微分の関係式

$$\boxed{\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)}$$

解説

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a)$$

← x と定数だけの式

上式の両辺を x で微分すると、

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = \left(F(x)\right)' - \left(F(a)\right)' = f(x) - 0 = f(x)$$

例1 **［微分と定積分］ 関数 $\int_{-1}^{x}(2t^2-3)dt$ を x で微分してみよう。**

$$\frac{d}{dx}\int_{-1}^{x}(2t^2-3)dt = 2x^2-3$$

例2 次の等式を満たす関数 $f(x)$ と定数 a の値を求めよ。

$$\int_1^x f(t)dt = x^2+x+a$$

与えられた等式の両辺を x で微分すると,

$$f(x)=2x+1$$

← $\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$の関係

また, 与えられた等式に $x=1$ を代入すると,

$$\int_1^1 f(t)dt = 1+1+a$$

$\int_1^1 f(t)dt=0$ であるから, $2+a=0$ より, $a=-2$

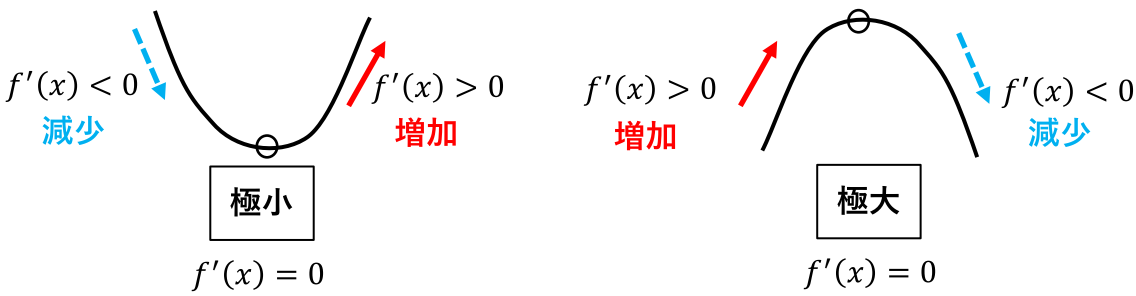
$$\int_1^1 f(t)dt = F(1) - F(1) = 0$$

<u>2章-1.増減表とグラフの形</u>

前回の授業で導関数は接線の傾きを表すことを学習した。**正の傾きの接線が描けるときは増加、負の傾きの接線が描けるとき減少**していることが分かる。**接線の傾きが正から負に変わるとき極大、負から正に変わるとき極小**という。

関数の増減と極値（極大、極小）の関係

$f'(x)>0$ となる x の値の範囲で増加する。
$f'(x)<0$ となる x の値の範囲で減少する。
$f'(x)$ の符号が正から負に変わるとき，極大になる。
$f'(x)$ の符号が負から正に変わるとき，極小になる。



例　次の関数の極値を求め，そのグラフをかけ。

$$y=x^3-3x^2+3$$

$y'=3x^2-6x=3x(x-2)$

$y'=0$ より，　$x=0,\ 2$

y の増減表は，次のようになる。

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗	3（極大）	↘	-1（極小）	↗

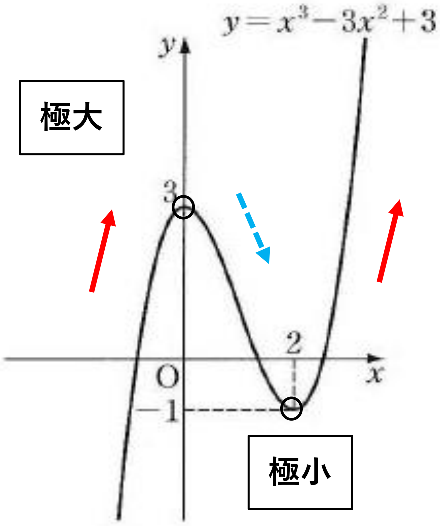
したがって，この関数は，

$x=0$ のとき極大で，極大値 3

$x=2$ のとき極小で，極小値 -1

をとる。

以上のことから，グラフをかくと右の図のようになる。



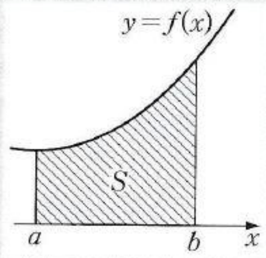
2章-2.定積分と面積

※面積の計算は定積分で求められる！

面積と定積分

$a \leqq x \leqq b$ で，$f(x) \geqq 0$ のとき，曲線 $y=f(x)$ と x 軸および 2 直線 $x=a$，$x=b$ とで囲まれた部分の面積 S は，

$$S=\int_a^b f(x)dx$$



注. $f(x)<0$ となる部分はx軸に関して折り返して計算すること

例1 ［面　積］ 放物線 $y=4-x^2$ と x 軸とで囲まれた部分の面積 S を求めてみよう。

放物線と x 軸との交点の x 座標は，

$4-x^2=0$ より，$x=\pm 2$ ← 交点が積分区間

$-2 \leqq x \leqq 2$ で，$4-x^2 \geqq 0$ であるから，

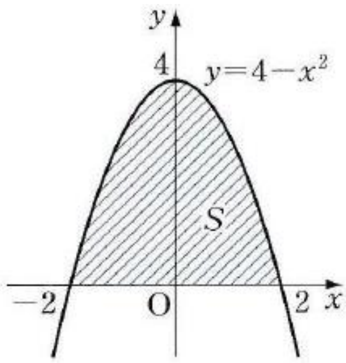
折り返さずにそのまま計算

$$S=\int_{-2}^{2}(4-x^2)dx$$

$$=\left[4x-\frac{1}{3}x^3\right]_{-2}^{2}$$

$$=\frac{32}{3}$$

←



例2

2 つの放物線 $y=4-x^2$，$y=x^2-2x$ で囲まれた部分の面積を求めよ。

2 つの放物線の交点の x 座標は，

$$4-x^2=x^2-2x$$

を解いて，　$x=-1,\ 2$ ← 交点が積分区間

上側　下側

$-1 \leqq x \leqq 2$ のとき，$4-x^2 \geqq x^2-2x$

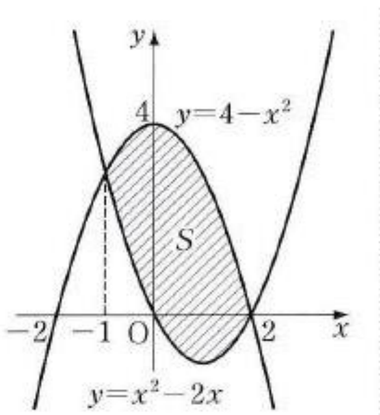
であるから，求める面積 S は，

$$S=\int_{-1}^{2}\{(4-x^2)-(x^2-2x)\}dx$$

上側　下側

$$=\int_{-1}^{2}(-2x^2+2x+4)dx$$

$$=\left[-\frac{2}{3}x^3+x^2+4x\right]_{-1}^{2}=9$$



注. 2曲線で囲まれた面積は上側から下側を引いて積分

次の定積分を計算しなさい。

(1) $\int_{-1}^{2}(3t-1)(t+1)dt$

(2) $\int_{1}^{4}|x-2|dx$

(3) 等式 $\int_{a}^{x} f(t)dt = x^2 - 2x + 1$ を満たす関数*f(x)*および定数aの値を求めなさい。

(4)　関数 $y=x^3-6x^2+9x-2$ の極値を求め，そのグラフをかけ。

(5)　次の2曲線で囲まれた部分の面積を求めなさい。

$y=x^2-2x$，$y=-x^2+x+2$

次の定積分を計算しなさい。

(1) $\displaystyle\int_{-1}^{2}(3t-1)(t+1)dt$

$$\int_{-1}^{2}(3t-1)(t+1)dt=\int_{-1}^{2}(3t^2+2t-1)dt=\Big[t^3+t^2-t\Big]_{-1}^{2}$$
$$=(8+4-2)-(-1+1+1)$$
$$=10-1=\mathbf{9}$$

(2) $\displaystyle\int_{1}^{4}|x-2|dx$

$1\leqq x\leqq 2$ のとき　$|x-2|=-(x-2)$

$2\leqq x\leqq 4$ のとき　$|x-2|=x-2$

よって　$\displaystyle\int_{1}^{4}|x-2|dx=\int_{1}^{2}\{-(x-2)\}dx+\int_{2}^{4}(x-2)dx$

$$=-\left[\frac{x^2}{2}-2x\right]_{1}^{2}+\left[\frac{x^2}{2}-2x\right]_{2}^{4}$$
$$=-\left\{(2-4)-\left(\frac{1}{2}-2\right)\right\}+(8-8)-(2-4)$$
$$=-(-2)\times2+\frac{1}{2}-2=\mathbf{\frac{5}{2}}$$

(3) 等式 $\displaystyle\int_{a}^{x}f(t)dt=x^2-2x+1$ を満たす関数*f(x)*および定数aの値を求めなさい。

$\displaystyle\int_{a}^{x}f(t)dt=x^3-2x+1$ ……①とする。

①の両辺を x で微分すると

$$\frac{d}{dx}\int_{a}^{x}f(t)dt=3x^2-2 \quad ゆえに \quad \boldsymbol{f(x)=3x^2-2}$$

また，①の両辺で $x=a$ とすると

$$\int_{a}^{a}f(t)dt=a^3-2a+1 \quad ゆえに \quad a^3-2a+1=0$$

よって $(a-1)(a^2+a-1)=0$ から

$$\boldsymbol{a=1,\ \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}}$$

(4)

$y=x^3-6x^2+9x-2$ から

$y'=3x^2-12x+9$

$=3(x-1)(x-3)$

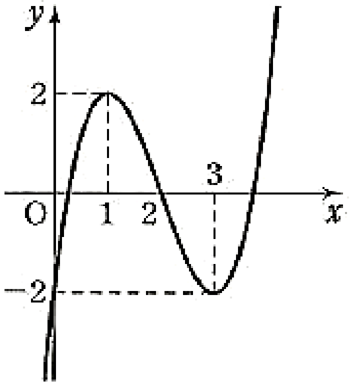
$y'=0$ とすると　$x=1,\ 3$

y の増減表は右のようになる。

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗	極大	↘	極小	↗

よって，y は　**$x=1$ のとき極大値** $1-6+9-2=$**2**

$x=3$ のとき極小値 $27-54+27-2=$**-2**



(5)　次の2曲線で囲まれた部分の面積を求めなさい。

$y=x^2-2x,\ y=-x^2+x+2$

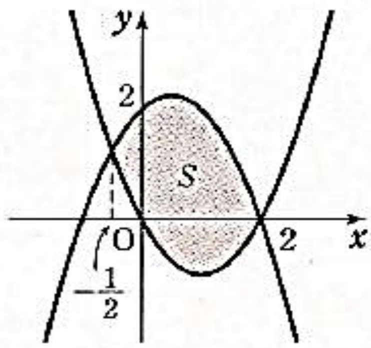
2 曲線の交点の x 座標は

$x^2-2x=-x^2+x+2$　すなわち

$2x^2-3x-2=(2x+1)(x-2)=0$

から　$x=-\frac{1}{2},\ 2$

ゆえに，右の図から，求める面積 S は



$S=\int_{-\frac{1}{2}}^{2}\{(-x^2+x+2)-(x^2-2x)\}dx$

$=\int_{-\frac{1}{2}}^{2}(-2x^2+3x+2)dx=-2\int_{-\frac{1}{2}}^{2}\left(x+\frac{1}{2}\right)(x-2)dx$

$=-2\left(-\frac{1}{6}\right)\left\{2-\left(-\frac{1}{2}\right)\right\}^3=\mathbf{\frac{125}{24}}$