第7回復習用問題の解答

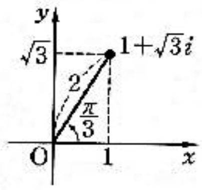
問題1.

(1) $|1+\sqrt{3}i| = \sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2} = 2$

偏角 θ は $\cos\theta = \dfrac{1}{2}$, $\sin\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ を満たす。

$-\pi < \theta \leqq \pi$ の範囲で　$\theta = \dfrac{\pi}{3}$

よって　$1+\sqrt{3}i = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$

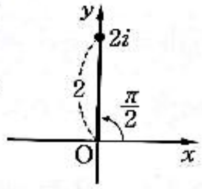


(2) $|2i| = \sqrt{0^2+2^2} = 2$

偏角 θ は $\cos\theta = 0$, $\sin\theta = 1$ を満たす。

$-\pi < \theta \leqq \pi$ の範囲で　$\theta = \dfrac{\pi}{2}$

よって　$2i = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2}\right)$



(3) $|\cos\alpha - i\sin\alpha| = \sqrt{(\cos\alpha)^2+(-\sin\alpha)^2} = 1$

◀ $\cos\alpha - i\sin\alpha$ の絶対値は1である。

偏角 θ は

$\cos\theta = \cos\alpha = \cos(-\alpha)$, $\sin\theta = -\sin\alpha = \sin(-\alpha)$

を満たし，$-\pi < -\alpha \leqq \pi$ であるから　$\theta = -\alpha$

◀ $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ より

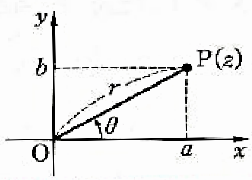
よって　$\cos\alpha - i\sin\alpha = \cos(-\alpha) + i\sin(-\alpha)$

POINT（複素数の極形式）

0でない複素数 $z = a+bi$（a, b は実数）に対して

(1) 絶対値は　$|z| = r = \sqrt{a^2+b^2}$

(2) 偏角 $\arg z = \theta$ は $\cos\theta = \dfrac{a}{r}$, $\sin\theta = \dfrac{b}{r}$ を満たす角である。



問題2.

$$z_1 = 1+i = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

◀ $|z_1| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$

$$z_2 = \sqrt{3}+i = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

◀ $|z_2| = \sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2} = 2$

よって　$|z_1| = \sqrt{2}$, $|z_2| = 2$, $\arg z_1 = \frac{\pi}{4}$, $\arg z_2 = \frac{\pi}{6}$

(1)　$|\alpha| = |z_1z_2| = |z_1||z_2| = 2\sqrt{2}$

$\arg\alpha = \arg(z_1z_2) = \arg z_1 + \arg z_2 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6} = \frac{5}{12}\pi$

よって　$\alpha = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{5}{12}\pi + i\sin\frac{5}{12}\pi\right)$

◀ 2つの複素数 z_1, z_2 の積 z_1z_2 の
絶対値は $|z_1||z_2|$
偏角は $\arg z_1 + \arg z_2$

(2)　$|\beta| = \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\arg\beta = \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2 = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{12}$

よって　$\beta = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$

◀ 2つの複素数 z_1, z_2 の商 $\frac{z_1}{z_2}$ の
絶対値は $\frac{|z_1|}{|z_2|}$
偏角は $\arg z_1 - \arg z_2$

POINT（極形式で表された2つの複素数の積と商）

$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$, $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ $(z_1 \neq 0,\ z_2 \neq 0)$ のとき

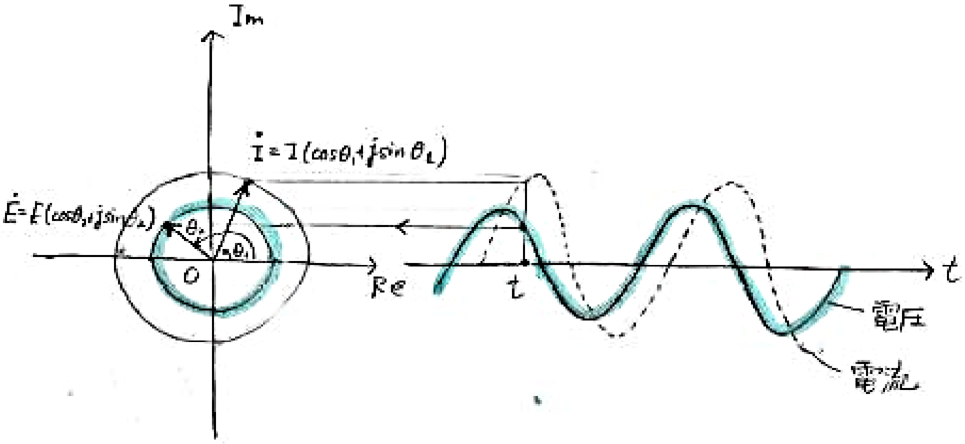
$z_1z_2 = r_1r_2\{\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)\}$, $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\{\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2)\}$

問題3. 正弦波状に周期的に変化する電流と電圧は、それぞれの実効値を半径とする円に投影した点のベクトルによって表すと便利である。これを交流の複素数表示という。
複素数表示した電流と電圧はドット"・"を上に付けし、それぞれ $\dot{I}$, $\dot{E}$ で表し、共役な複素数はバー"－"を上に付けて表す。
いま、電流の実効値をI, 位相を θ_1、電圧の実効値をE、位相を θ_2 とすると、極形式は

$$\dot{I} = I(\cos\theta_1 + j\sin\theta_1)$$

$$\dot{E} = E(\cos\theta_2 + j\sin\theta_2)$$

と書くことができる。
力率角が電圧に対する電流の位相の進みまたは、遅れであることに注意すると、
有効電力Pと無効電力Qはそれぞれ $\bar{\dot{I}}\dot{E}$ の実部と虚部であることを確認しなさい。



上図のように電圧、電流を複素表示すると、位相差が力率角 ϕ であるので

$$\phi = \theta_2 - \theta_1$$

したがって、　有効電力 $P = IV\cos\phi = IV\cos(\theta_2 - \theta_1)$

　　　　　　　無効電力 $Q = IV\sin\phi = IV\sin(\theta_2 - \theta_1)$

一方、

$$\bar{\dot{I}}\dot{E} = I\underbrace{(\cos\theta_1 - j\sin\theta_1)}_{\text{共役}} \times E(\cos\theta_2 + j\sin\theta_2)$$

$$= IE\{\cos(-\theta_1) + j\sin(-\theta_1)\}(\cos\theta_2 + j\sin\theta_2)$$

公式 $\cos(-\theta) = \cos\theta$, $\sin(-\theta) = -\sin\theta$

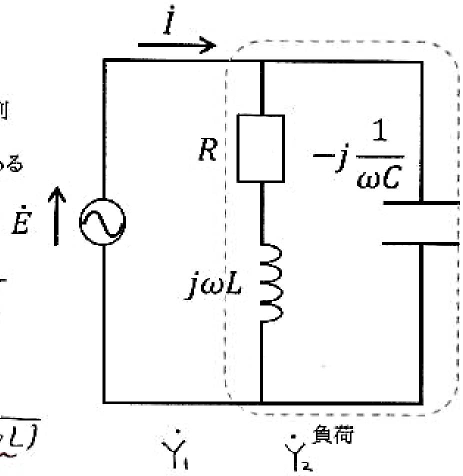
$$= IE\{\cos(\theta_2 - \theta_1) + j\sin(\theta_2 - \theta_1)\}$$ ← 積＝拡大回転

$$= P + jQ$$ 終了

注 遅れ無効電力を負とするとき、
複素電力は $\dot{I}\bar{\dot{E}}$ で表す

問題4.

右図のように抵抗、コイル、コンデンサを直並列に接続した負荷がある。
電源側から見たときにこの負荷の力率が1であるとき、コンデンサの静電容量Cをω、R、Lを用いて求めなさい。



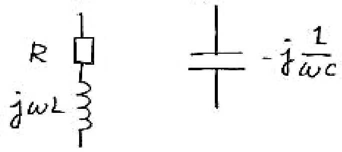
並列部分を2つに分けて、RとLを含むアドミタンスを$\dot{Y}_1$，Cを含むアドミタンスを$\dot{Y}_2$とすると、

$$\dot{Y}_1 = \frac{1}{R+j\omega L} = \frac{R-j\omega L}{(R+j\omega L)\underbrace{(R-j\omega L)}_{共役}}$$

分母の実数化

$$= \frac{R-j\omega L}{R^2+(\omega L)^2}$$

$$\frac{1}{Z} = \frac{\bar{Z}}{Z\bar{Z}} = \frac{\bar{Z}}{|Z|^2}$$



$$\dot{Y}_2 = j\omega C$$

$\dot{I} = (\dot{Y}_1+\dot{Y}_2)\dot{E}$ であるから、$\dot{I}$と$\dot{E}$が同位相、つまり$\dot{Y}_1+\dot{Y}_2$の虚部$=0$となるとき力率は1となる。

したがって、

$$\mathrm{Im}(\dot{Y}_1+\dot{Y}_2) = \frac{-\omega L}{R^2+(\omega L)^2} + \omega C = 0$$

ゆえに、静電容量 $C = \underline{\dfrac{L}{R^2+(\omega L)^2}}$

問題5. 時間をt、入力変数をu(t)、出力変数をy(t)、そしてゲインをτ,Kとする。
1次遅れ系の微分方程式

$$\tau\frac{dy}{dt}+y(t)=Ku(t)$$

の伝達関数G(s)はラプラス変換をすることで、

$$G(s)=\frac{K}{\tau s+1}$$

と求めることができる。s＝jωとすると、周波数伝達関数G(jω)が得られる。
周波数伝達関数に対して、ゲイン $g=20\log_{10}|G(j\omega)|$ と位相 $\phi=\tan^{-1}\frac{Im(G(j\omega))}{Re(G(j\omega))}$
を計算することで、入力値に対する出力値の振幅の大きさ、応答のずれ(遅れまたは進み)を理解することができる。
いま、時定数τ＝1、ゲインK＝1として、下記の周波数伝達関数G(jω)のゲインgを片対数目盛に沿って、また位相特性Φを横軸を各周波数ωとして図示しなさい。

周波数伝達関数 $G(j\omega)=\frac{1}{j\omega+1}$

ゲイン $g=20\log_{10}|G(j\omega)|=20\log_{10}\frac{1}{\sqrt{1+\omega^2}}=-20\log_{10}\sqrt{1+\omega^2}$

$=-10\log_{10}(1+\omega^2)$ [dB]

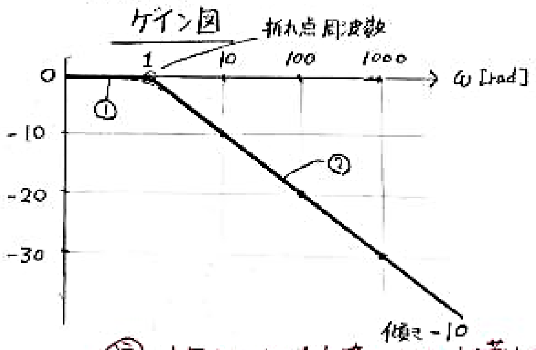
位相特性 $\phi=\tan^{-1}\frac{Im(G(j\omega))}{Re(G(j\omega))}=\tan^{-1}(-\omega)=-\tan^{-1}\omega$ [rad]

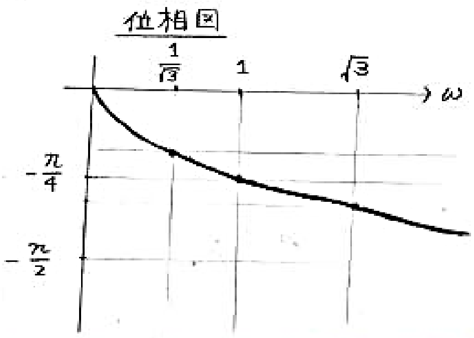
ヒント：ゲイン特性の図の折れ点は $\omega^2=1$ を満たすωとなる

$\omega<1$ のとき、$\omega^2\fallingdotseq 0$ とすれば $g\fallingdotseq -10\log_{10}1=0$ [dB] —①

$\omega>1$ のとき、$\omega^2\gg 1$ とすれば、$g\fallingdotseq -10\log_{10}\omega$ [dB] —②

また、$\phi=-\tan^{-1}\omega$ より、$\omega=-\tan\phi$ となる。
よって、位相図は $\omega=-\tan\phi$ の逆関数となる。





(注) 上図より、ω=1を境にゲインが著しく減少し、入力に対して出力が追従できなくなることがわかる。また、入力に対して出力の応答が遅れるため1次遅れ系と呼ばれる