第7回授業資料

2019.5.23

1章-1.三角方程式と解法

$sin\theta(cos\theta, tan\theta)$の多項式 = （定数）の形の**等式を三角方程式**という。

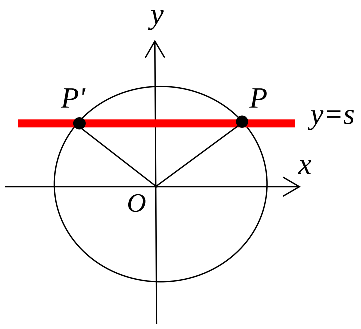
三角方程式を満たす**θを三角方程式の解**という。

$\boxed{\text{三角方程式の解き方}}$

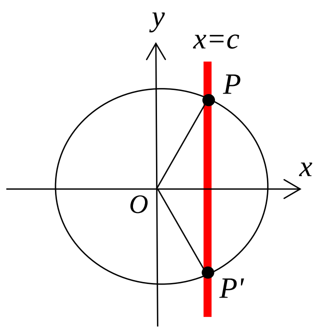
[1] 次の直線と半円の図をかいて，次の点 P，T の位置をつかむ。
$\sin\theta=s$ なら，直線 $y=s$ と半円の交点 P,
$\cos\theta=c$ なら，直線 $x=c$ と半円の交点 P,
$\tan\theta=t$ なら，直線 $y=t$ と直線 $x=1$ の交点 T（OT と半円の交点が P）

[2] ∠POx の大きさを求める。 ⟵ 30°，45°，60° などの三角比を用いる。

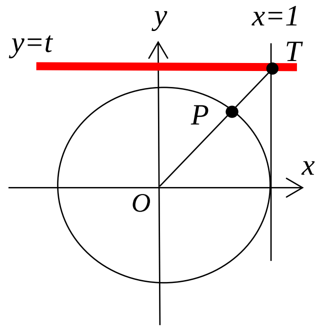
$sin\theta=s$のとき



$cos\theta=c$のとき



$tan\theta=t$のとき

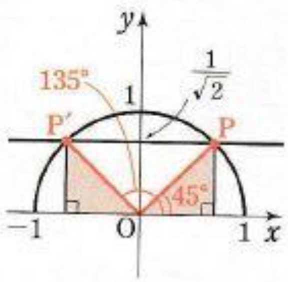


※tanθは直線の傾きと見て解いてもよい

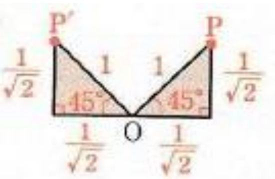
例1. $0°\leqq\theta\leqq180°$ のとき，次の等式を満たす θ を求めよ。

① $\sin\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}$ ② $\cos\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

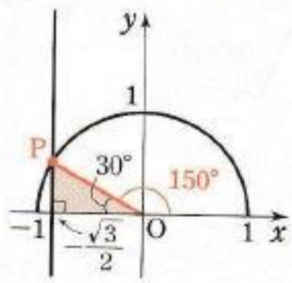
$\sin\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}$



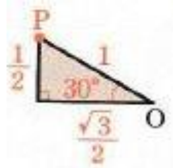
図から $\underline{\theta=45°,\ 135°}$



$\cos\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2}$



図から $\underline{\theta=150°}$



$\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$ の **いずれか 1 種類の三角比の方程式** に直して解く。

$\boxed{1}$ (1) $\cos^2\theta=1-\sin^2\theta$, (2) $\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ を代入。……… $\boxed{!}$

$\boxed{2}$ (1) は $\sin\theta$ だけ，(2) は $\cos\theta$ だけの式になるから，その三角比を t とおく。

⟶ t の 2 次方程式になる。ただし，**t の変域に要注意！**

$\boxed{3}$ t の方程式を解き，t の値に対応する θ の値を求める。

例2. $2\cos^2\theta+3\sin\theta-3=0$ $(0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ)$ を解きなさい。

$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta$ であるから　$2(1-\sin^2\theta)+3\sin\theta-3=0$

整理すると　$2\sin^2\theta-3\sin\theta+1=0$　　**変域に注意**

$\sin\theta=t$ とおくと，$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ のとき　$\boxed{0\leqq t\leqq 1}$ …… ①

方程式は　$2t^2-3t+1=0$　　ゆえに　$(t-1)(2t-1)=0$

よって　$t=1,\ \dfrac{1}{2}$　　これらは ① を満たす。

$t=1$　すなわち　$\sin\theta=1$　を解いて　$\theta=90^\circ$

$t=\dfrac{1}{2}$　すなわち　$\sin\theta=\dfrac{1}{2}$　を解いて　$\theta=30^\circ,\ 150^\circ$

以上から　$\theta=30^\circ,\ 90^\circ,\ 150^\circ$

チェック！

1つの三角比にまとめて文字の置き換えで解く！

1章-2.三角不等式と解法

$sin\theta(cos\theta, tan\theta)$の多項式が不等号（≦≧<>）で結ばれた式を**三角不等式**という。

三角不等式の解は～≦θ≦～のように、**範囲がある**のが一般的。

三角不等式の解き方

三角関数を含む不等式(三角不等式)を満たす θ の範囲を求めるには，

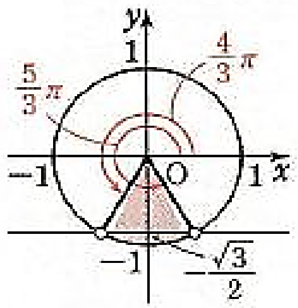
(!) まず ＝ とおいた三角方程式を解く

例1. $0\leqq\theta<2\pi$ のとき，次の不等式を解け。

① $\sin\theta<-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$0\leqq\theta<2\pi$ の範囲で，$\sin\theta=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ を満たす θ の値は　$\theta=\dfrac{4}{3}\pi,\ \dfrac{5}{3}\pi$

下の図から，不等式を満たす θ の範囲は　$\dfrac{4}{3}\pi<\theta<\dfrac{5}{3}\pi$



例2.　$2\sin^2\theta+5\cos\theta-4>0$ を解きなさい。

）不等式から　$2(1-\cos^2\theta)+5\cos\theta-4>0$

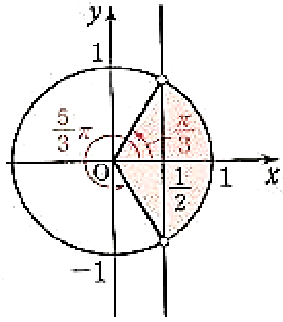
整理すると　$2\cos^2\theta-5\cos\theta+2<0$

よって　$(\cos\theta-2)(2\cos\theta-1)<0$

$0\leqq\theta<2\pi$ のとき，$-1\leqq\cos\theta\leqq1$ であるから，常に $\cos\theta-2<0$ である。

したがって　$2\cos\theta-1>0$　すなわち　$\cos\theta>\dfrac{1}{2}$

これを解いて　$0\leqq\theta<\dfrac{\pi}{3}$，$\dfrac{5}{3}\pi<\theta<2\pi$

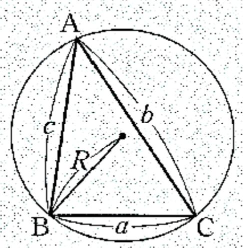


2章-1.正弦定理と余弦定理

正弦定理

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$

（ただし，R は △ABC の外接円の半径）

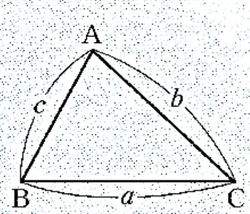


チェック！

正弦(sin)定理は2つの角度と1つの辺がわかっているときに利用

余弦定理

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$$
$$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$$
$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$$



チェック！

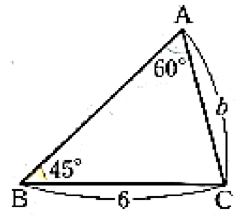
余弦(cos)定理は2つの辺と1つの角度がわかっているときに利用

余弦定理の派生公式

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$
$$\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$$
$$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

角度を求める問題で使います

例1. ［正弦定理］ △ABC で，$a=6$，$A=60°$，$B=45°$ のとき，b の値を求めてみよう。

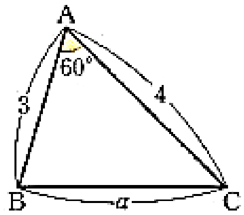


正弦定理により，$\dfrac{6}{\sin 60^\circ}=\dfrac{b}{\sin 45^\circ}$

であるから，

$$b=\frac{6}{\sin 60^\circ}\times\sin 45^\circ$$
$$=6\div\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{\sqrt{2}}=2\sqrt{6}$$

例2. ［余弦定理］ △ABC で，$b=4$，$c=3$，$A=60°$のとき，a の値を求めてみよう。



余弦定理により，

$$a^2=4^2+3^2-2\cdot4\cdot3\cos 60^\circ$$

$\cos 60^\circ=\dfrac{1}{2}$ であるから，

$$a^2=16+9-12=13$$

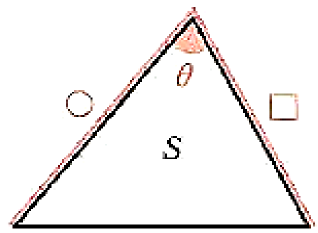
$a>0$ より，　$a=\sqrt{13}$

2章-2.三角形の面積

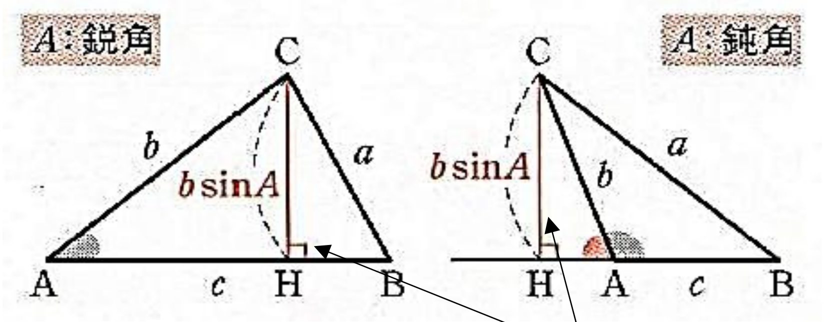
三角形の面積

△ABC の面積を S とすると

$$S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ca\sin B=\frac{1}{2}ab\sin C$$



$$S=\frac{1}{2}\times○\times□\times\sin\theta$$



高さはいずれも

b×sinAになる

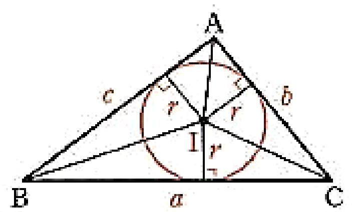
内接円の半径rと面積

三角形の内接円と面積

三角形の 3 辺に接する円を，その三角形の **内接円** という。

△ABC の面積を S，内接円の半径を r とすると　$S=\frac{1}{2}r(a+b+c)$

$$S=\triangle IBC+\triangle ICA+\triangle IAB=\frac{1}{2}ar+\frac{1}{2}br+\frac{1}{2}cr$$
$$=\frac{1}{2}r(a+b+c) \quad \cdots\cdots ①$$

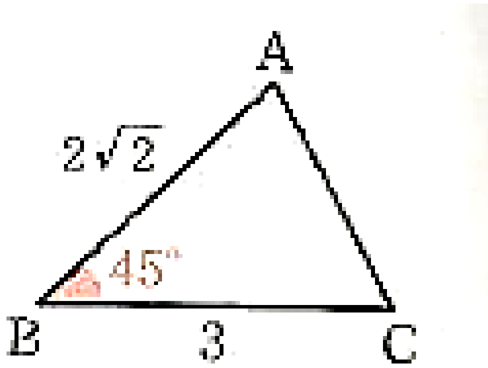


チェック！

内接円の中心で三角形を3分割する！

例.　次のような △ABC の面積 S を求めよ。

$$S=\frac{1}{2}ca\sin B=\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{2}\cdot 3\sin 45^\circ=3\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=3$$



チェック！

三角形の面積は2辺と間の角度のsinがわかると求められる！

$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ のとき，次の等式を満たす θ を求めよ。

(1) $\sin\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(2) $\tan\theta = -1$

次の方程式を解け。

(3) $2\sin^2\theta - \cos\theta - 1 = 0$ $(0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ)$

$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の不等式を解け。

(4) $\dfrac{1}{2} \leqq \cos\theta \leqq \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

(5) $\tan\theta \geqq \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$0° \leqq \theta \leqq 180°$ のとき，次の不等式を解け。

(6) $4\cos^2\theta+(2+2\sqrt{2})\sin\theta>4+\sqrt{2}$

$\triangle$ABC において，$a=2$，$b=\sqrt{2}$，$c=1$ とする。次のものを求めよ。

(7) $\cos B$，$\sin B$

(8) $\triangle$ABC の面積 S

(9) $\triangle$ABC の内接円の半径 r

(10) $\triangle$ABC の外接円の半径 R

$0° \leqq \theta \leqq 180°$ のとき，次の等式を満たす θ を求めよ。

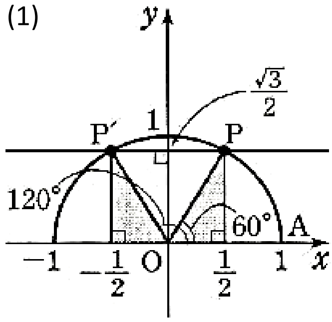
(1) $\sin\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\theta = 60°,\ 120°$

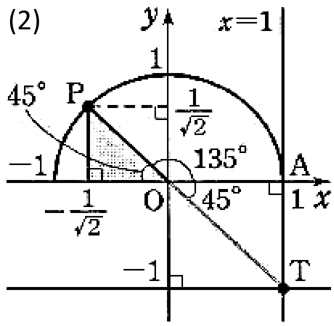
(2) $\tan\theta = -1$

$\theta = 135°$

(1)



(2)



次の方程式を解け。

(3) $2\sin^2\theta - \cos\theta - 1 = 0\ (0° \leqq \theta \leqq 180°)$

$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$ であるから　$2(1-\cos^2\theta) - \cos\theta - 1 = 0$

整理すると　$2\cos^2\theta + \cos\theta - 1 = 0$

$\cos\theta = t$ とおくと，$0° \leqq \theta \leqq 180°$ のとき　$-1 \leqq t \leqq 1$ …… ①

方程式は　$2t^2 + t - 1 = 0$　ゆえに　$(t+1)(2t-1) = 0$

よって　$t = -1,\ \dfrac{1}{2}$　これらは ① を満たす。

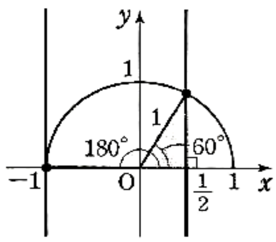
$t = -1$ すなわち $\cos\theta = -1$ を解いて　$\theta = 180°$

$t = \dfrac{1}{2}$ すなわち $\cos\theta = \dfrac{1}{2}$ を解いて　$\theta = 60°$

以上から　$\theta = 60°,\ 180°$

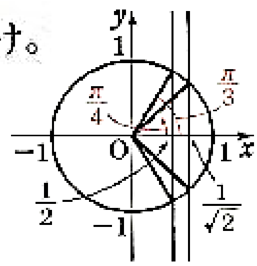
←$\cos\theta$ の 2 次方程式。

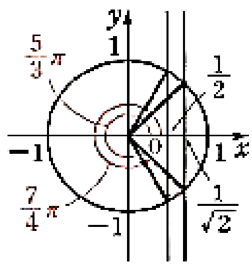
←おき換えを利用。



$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の不等式を解け。

(4) $\dfrac{1}{2} \leqq \cos\theta \leqq \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

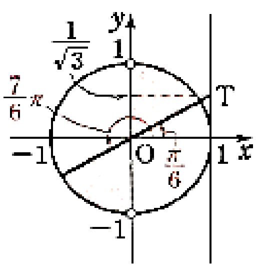




$0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲で，$\cos\theta = \dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ を満たす θ の値は　$\theta = \dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{5}{3}\pi,\ \dfrac{7}{4}\pi$

よって，下の図から，不等式を満たす θ の範囲は　$\dfrac{\pi}{4} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{5}{3}\pi \leqq \theta \leqq \dfrac{7}{4}\pi$

(5) $\tan\theta \geqq \dfrac{1}{\sqrt{3}}$



$0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲で，$\tan\theta = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ を満たす θ の値は　$\theta = \dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{7}{6}\pi$

よって，下の図から，不等式を満たす θ の範囲は　$\dfrac{\pi}{6} \leqq \theta < \dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{7}{6}\pi \leqq \theta < \dfrac{3}{2}\pi$

$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ のとき，次の不等式を解け。

(6) $4\cos^2\theta+(2+2\sqrt{2})\sin\theta>4+\sqrt{2}$

$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta$ であるから

$$4(1-\sin^2\theta)+(2+2\sqrt{2})\sin\theta>4+\sqrt{2}$$

整理すると　$4\sin^2\theta-(2+2\sqrt{2})\sin\theta+\sqrt{2}<0$　←$\sin\theta$ の 2 次不等式。

$\sin\theta=t$ とおくと，$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ のとき　$0 \leqq t \leqq 1$ …… ①　←t の変域に注意。

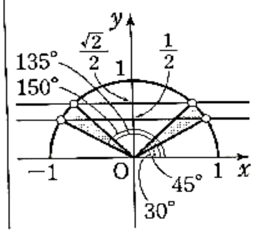
不等式は　$4t^2-(2+2\sqrt{2})t+\sqrt{2}<0$

ゆえに　$(2t-1)(2t-\sqrt{2})<0$　よって　$\frac{1}{2}<t<\frac{\sqrt{2}}{2}$

① との共通範囲は　$\frac{1}{2}<t<\frac{\sqrt{2}}{2}$

ゆえに，$\frac{1}{2}<\sin\theta<\frac{\sqrt{2}}{2}$ を解いて

$30^\circ<\theta<45^\circ$，$135^\circ<\theta<150^\circ$



△ABC において，$a=2$，$b=\sqrt{2}$，$c=1$ とする。次のものを求めよ。

(7) $\cos B$，$\sin B$　(8) △ABC の面積 S

(9) △ABC の内接円の半径 r　(10) △ABC の外接円の半径 R

(7) 余弦定理により

$$\cos B=\frac{1^2+2^2-(\sqrt{2})^2}{2\cdot1\cdot2}=\frac{3}{4}$$

$\sin B>0$ であるから　$\sin B=\sqrt{1-\left(\frac{3}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{7}}{4}$

(8) $S=\frac{1}{2}ca\sin B=\frac{1}{2}\cdot1\cdot2\cdot\frac{\sqrt{7}}{4}=\frac{\sqrt{7}}{4}$

(9) $S=\frac{1}{2}r(a+b+c)$ から

$$\frac{\sqrt{7}}{4}=\frac{1}{2}r(2+\sqrt{2}+1)$$

よって　$r=\frac{\sqrt{7}}{2(3+\sqrt{2})}=\frac{\sqrt{7}(3-\sqrt{2})}{14}$

(10 正弦定理により

$$R=\frac{b}{2\sin B}=\sqrt{2}\div\left(2\cdot\frac{\sqrt{7}}{4}\right)=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7}}=\frac{2\sqrt{14}}{7}$$